# SELEZIONE PER L'AMMISSIONE ALLA SCUOLA GALILEIANA
# PROVA DI MATEMATICA
# A.A. 2023-2024

*Problema* 1. Consideriamo un cubo $\alpha$ il cui spigolo sia lungo 4. Siano $ABCDEFGH$ i vertici del cubo, in modo tale che i punti $ABCD$ siano anche i vertici di un tetraedro regolare che chiameremo $\beta$. Sia $S$ la superficie del tetraedro e sia $O$ il centro del cubo. Sia infine $\Gamma$ l'insieme dei punti del cubo che distano dalla superficie del tetraedro al più 1.
(`Per distanza di un punto` $x$ `dall'insieme` $S$ `si intende:`
$d(x, S) = \min\{d(x, y)|y \in S\}$)
(`Non calcolare le radici quadrate, lasciare i risultati in una forma del tipo:`
$\boxed{\texttt{volume di } \gamma = 48 - 16\sqrt{3}}$)

a) Determinare l'area di $S$.
b) Determinare il volume di $\beta$
c) Determinare la distanza di $O$ da $S$.
d) Determinare la distanza di $E$ da $S$
e) Determinare il numero di componenti connesse da cui è costituita la superficie di $\Gamma$. Per ciascuna di esse determinarne l'area.

*Problema* 2. Dimostrare che, comunque siano date cinque funzioni $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ (con $i = 1, 2, 3, 4, 5$), esistono $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in [0, 1]$ tali che

$$|f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) + f_5(x_5) - x_1x_2x_3x_4x_5| \geq \frac{2}{5}$$

*Problema* 3. Sia $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile in ogni punto di $(0, 1)$.

(1) Sapendo che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (0, 1)$, dimostrare che vale per ogni $x \in (0, 1)$

$$|f'(x)| \leq \max\left\{\frac{2}{x}, \frac{2}{1-x}\right\} \sup_{y\in(0,1)} |f(y)|$$

(2) Sapendo che $f''(x) \geq 1$ per ogni $x \in (0, 1)$, dimostrare che

$$\sup_{y\in(0,1)} f(y) - \inf_{y\in(0,1)} f(y) \geq \frac{1}{8}.$$

*Problema* 4. Consideriamo due polinomi $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (ossia a coefficienti in $\mathbb{Z}$), con $g(x)$ di grado $\geq 1$.

(1) Dimostrare che esiste un numero naturale $d$ (eventualmente uguale a 0) e dei polinomi $h_0(x), ..., h_d(x) \in \mathbb{Q}[x]$, tutti di grado minore del grado di $g(x)$, tali che

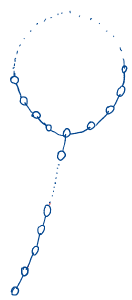
$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} h_i(x)g(x)^i$$

(2) Dimostrare che se $g(m)$ divide $f(m)$ per tutti gli $m \in \mathbb{Z}$ allora, riferendosi ai polinomi $h_0(x), ..., h_d(x) \in \mathbb{Q}[x]$ del punto precedente, vale che $h_0(x) = 0$.
(3) Esibire un esempio in cui i polinomi $h_1(x), ..., h_d(x)$ del quesito (2) non abbiano tutti i coefficienti interi.

*Problema* 5. Alcune lampadine led sono collegate in successione da dei tratti di filo. Le lampadine possono fare luce di tre colori: verde, blu, e rosso. Ogni tratto di filo che collega due lampadine contiene un pulsante. Se le due lampadine agli estremi del tratto di filo danno luce di colori diversi, premendo il pulsante entrambe passeranno a dare luce dello stesso colore, il terzo disponibile. Per esempio, indicando con 0 il blu, con 1 il verde e con 2 il rosso, da una configurazione 0,1 si passa, premendo il pulsante, alla 2,2, oppure dalla 1,2 si passa alla 0,0 etc..

(1) Supponiamo di avere 4 lampadine in successione $\circ - \circ - \circ - \circ$. Dimostrare che, qualunque siano i colori iniziali, è possibile, premendo i pulsanti in un opportuno ordine, portarle ad avere tutte lo stesso colore. Data una certa configurazione iniziale dei colori, il colore finale che si ottiene è unico o può dipendere dalle particolari mosse effettuate?

(2) Con le lampadine e i tratti di filo si riproduce il disegno di un palloncino: Più



precisamente, la parte circolare del palloncino contiene 100 lampadine e i 100 tratti di filo che le collegano sono muniti di pulsante. Da una delle lampadine parte la "coda" del palloncino, costituita da 33 ulteriori lampadine in successione, e tutti i tratti di filo presenti contengono il pulsante. In tutto abbiamo 133 lampadine e 133 pulsanti. Supponiamo che all'inizio 34 di queste diano luce blu, 57 rossa e 42 verde. Ci si chiede se è possibile, premendo i pulsanti in un ordine opportuno, ottenere che tutte le lampadine diano luce dello stesso colore. La risposta dipende dalle posizioni in cui erano all'inizio le 34 lampadine blu, le 57 rosse e le 42 verdi? E, in tal caso, in che modo?

# Soluzioni

**Problema 1** Il tetraedro $\beta$ ha lo spigolo uguale alla diagonale del cubo $AB = 4\sqrt{2}$. E' una piramide con gli spigoli tutti uguali. Con un minimo di calcoli si ottiene.
(a)

$$\boxed{Area(S) = 32\sqrt{3}}$$

(b)

$$\boxed{Volume(\beta) = \frac{64}{3}}$$

(c) Il centro $O$ del cubo è anche il centro del tetraedro, ne è il baricentro quindi la distanza dalle facce è un quarto dell'altezza della piramide.

$$\boxed{d(O, S) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

(d) $d(E, S) = d(O, E) - d(O, S)$

$$\boxed{d(E, S) = \frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

(e) I quesiti precedenti sono più semplici rispetto a questo ultimo. Il quesito (e)richiede di determinare il numero di componenti connesse della superficie e poi per ciascuna determinarne l'area. Possono utilizzare i quesiti (c) e (d) per determinare la struttura dell'insieme $\Gamma$. Sappiamo che il solido $\Gamma$ è incluso nel cubo contiene la superfice $S$, dai quesiti (c) e (d) deduciamo che le distanze dei punti E, F, G, H e O dalla superfice $S$ sono maggiori di 1 quindi tali punti non appartengono a $\Gamma$. I punti del cubo che non appartengo a $\Gamma$ sono quelli di una cavità interna a forma piramidale con le facce parallelle alle facce di $\beta$ e quelli di quattro piramidi contenenti i punti $E$, $F$, $G$ e $H$.
Possiamo quindi dedurre che la superfice di $\Gamma$ ha due componenti connesse una esterna ed una interna.

(e.1) *Superfice interna*
Sia $\tilde{\beta}$ la cavità interna di $\Gamma$ e sia $\tilde{S}$ la sua superfice. $\tilde{\beta}$ è un tetraedro simile a $\beta$ con il quale condivide il centro $O$. Per costruzione $d(O, \tilde{S}) = d(O, S) - 1 = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$. Le due piramidi sono simili ed il rapporto di proporzionalità è dato da:

$$\frac{\text{spigolo di } \beta}{\text{spigolo di} \tilde{\beta}} = \frac{d(O, S)}{d(O, \tilde{S}} = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$$

Quindi

$$\text{Area } (\tilde{S}) = \text{Area } (S) \cdot \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right)^2 = \boxed{56\sqrt{3} - 96}$$

(e.2) *Superfice esterna*
Siano A, B, e C i vertici del cubo adiacenti ad $E$. Sia $\gamma$ la piramide con vertice in $E$ e base il triangolo equilatero di vertici $A$, $B$ e $C$. Il triangolo alla base della piramide $\gamma$ è equilatero ed ha lato una diagonale di una faccia del cubo. Vale:

$$\text{Area base di } \gamma \ = \ 8\sqrt{3}$$

Le facce laterali della piramide sono metà dei quadrati del cubo da cui si ottiene

$$\text{Area superfice laterale piramide } \gamma \ = 24$$

L'altezza della piramide è la distanza di $E$ da $S$ quindi:

$$\text{altezza piramide } \gamma = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Consideriamo ora l'insieme $\alpha/\Gamma$, abbiamo detto che questo insieme è costituito da 5 compenenti connesse, sia $\tilde{\gamma}$ la componente connessa contenente $E$.
$\tilde{\gamma}$ è una piramide simile alla piramide $\gamma$. Per costruzione l'altezza di $\tilde{\gamma}$ è uguale all'altezza della piramide $\gamma$ meno 1. Quindi le due piramide sono in rapporto:

$$\frac{\text{altezza } \gamma}{\text{altezza } \tilde{\gamma}} = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\sqrt{3}-1} = \frac{4}{4-\sqrt{3}}$$

quindi

$$\text{Area base di } \tilde{\gamma} \ = \text{Area base di } \gamma \cdot \left(\frac{4-\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{19\sqrt{3}-24}{2}$$

$$\text{Area superfice lat. } \tilde{\gamma} \ = \text{Area superfice lat. } \gamma \cdot \left(\frac{4-\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{57-24\sqrt{3}}{2}$$

In conclusione

$$\text{area superfice esterna } \Gamma = 6 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{57-24\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{19\sqrt{3}-24}{2} = 86\sqrt{3} - 66$$

**Problema 2 (soluzione 1)**

Supponiamo per assurdo che per ogni scelta di $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in [0,1]$ valga

$$|f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) + f_5(x_5) - x_1x_2x_3x_4x_5| < \frac{2}{5}$$

In particolare per $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ vale

$$\left|\sum_{i=1}^{5} f_i(1) - 1\right| < \frac{2}{5}$$

e per $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$$\left|\sum_{i=1}^{5} f_i(0)\right| < \frac{2}{5}$$

Inoltre, si ottengono altri cinque casi ponendo per ogni $i$, $x_i = 0$ e $x_j = 1$ per ogni $j \neq i$.
In questi casi si ha

$$\left|f_i(0) + \sum_{j\neq i} f_j(1)\right| < \frac{2}{5}$$

Stimiamo il valore $4\sum_{i=1}^{5} f_i(1)$. Abbiamo

$$4\sum_{i=1}^{5} f_i(1) = \left[\sum_{i=1}^{5}\left(f_i(0) + \sum_{j\neq i} f_j(1)\right)\right] - \sum_{i=1}^{5} f_i(0)$$

Per la disuguaglianza triangolare:

$$4\left|\sum_{i=1}^{5} f_i(1)\right| \leq \left[\sum_{i=1}^{5}\left|\left(f_i(0) + \sum_{j\neq i} f_j(1)\right)\right|\right] + \left|\sum_{i=1}^{5} f_i(0)\right| < 6\ \frac{2}{5}$$

dove nell'ultima disuguaglianza si sono usate le osservazioni precedenti. Possiamo dunque scrivere, ancora applicando prima la disuguaglianza triangolare poi le disuguaglianze ottenute fin qui:

$$1 = |1 - \sum_{i=1}^{5} f_i(1) + \sum_{i=1}^{5} f_i(1)| \leq |1 - \sum_{i=1}^{5} f_i(1)| + |\sum_{i=1}^{5} f_i(1)| < \frac{2}{5} + \frac{1}{4} 6 \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

che è un assurdo.

**Problema 2 (soluzione 2)**

Supponiamo per assurdo che per ogni scelta di $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in [0,1]$ valga

$$|f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) + f_5(x_5) - x_1x_2x_3x_4x_5| < \frac{2}{5} \tag{1}$$

Osserviamo che se le $f_j$ soddisfano (1) allora anche $\tilde{f}_1 = f_1 + c$, $\tilde{f}_2 = f_2 - c$, $\tilde{f}_3 = f_3$, $\tilde{f}_4 = f_4$, $\tilde{f}_5 = f_5$ soddisfano la condizione (1).
Quindi senza perdere in generalità possiamo assumere

$$f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = f_4(1) = f_5(1)$$

In particolare per $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$ la condizine (1) ci dà

$$\frac{3}{25} < f_1(1) < \frac{7}{25} \tag{2}$$

Inoltre, considerando i casi $i$, $x_i = 0$ e $x_j = 1$ per ogni $j \neq i$ la condizione (1) ci dà:

$$-\frac{2}{5} - 4f_1(1) < f_i(0) < \frac{2}{5} - 4f_1(1) \tag{3}$$

adesso componendo la (2) con la (3) si ottiene:

$$-\frac{38}{25} < f_i(0) < -\frac{2}{25} \tag{4}$$

Infine la condizione $f_i(0) < -\frac{2}{25}$ contraddice (1) nel caso $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

(**Extra.** Non richiesto dal problema.)
É interessante notare che se assumiamo per le $f_i$ le condizioni limite $f_i(1) = \frac{3}{25}$ e $f_i(0) = -\frac{2}{25}$ e le assumiamo lineari tra zero ed uno ovvero:

$$f_i(x) := -\frac{2}{25} + \frac{1}{5}x$$

allora per ogni scelta di $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in [0,1]$ vale

$$|f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4) + f_5(x_5) - x_1x_2x_3x_4x_5| \leq \frac{2}{5}$$

Il che dimostra che la costante $\frac{2}{5}$ del problema è ottimale e non può essere migliorata.

**Problema 3**

Il $\sup_{y\in(0,1)} |f(y)|$ è il più piccolo numero che è maggiore o uguale a tutti gli elementi dell'insieme $\{|f(y)| : y \in (0,1)\}$. Se $\sup_{y\in(0,1)} |f(y)| = +\infty$ allora non c'è nulla da dimostrare consideriamo quindi il caso finito.

La funzione $f$ è convessa e derivabile, dunque per ogni $x, y \in (0,1)$ vale

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{5}$$

Supponiamo che $f'(x) \geq 0$. Allora, per ogni $y > x$,

$$|f'(x)|(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq 2 \sup_{(0,1)} |f|,$$

e passando al limite per $y \to 1$ otteniamo

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{1-x} \sup_{(0,1)} |f|.$$

Se invece $f'(x) < 0$, per $y < x$

$$|f'(x)|(x-y) \leq f(y) - f(x) \leq 2 \sup_{(0,1)} |f|,$$

e passando al limite per $y \to 0$

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{x} \sup_{(0,1)} |f|,$$

da cui la tesi.

(2) Siccome $(f - x^2/2)'' \geq 0$, ripartiamo dalla (5) applicata a $f(x) - x^2/2$:

$$f(y) - \frac{y^2}{2} - f(x) + \frac{x^2}{2} \geq (f'(x) - x)(y-x).$$

Se $f'(1/2) \geq 0$, la precedente disuguaglianza valutata in $x = 1/2, y > x$ diventa

$$f(y) - f(1/2) \geq \frac{y^2}{2} - \frac{1}{8} + f'(1/2)\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

da cui $\sup f - \inf f \geq y^2/2 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right)$. Al limite per $y \to 1$ si ottiene la tesi. Nel caso $f'(1/2) < 0$ si ripete l'argomento con $y \to 0$.

**Problema 4**

Per il punto (1) si osserva innanzitutto che se il grado di $f$ è minore di quello di $g$ basta prendere $d = 0$ e $h_0 = f$. Se invece $deg\ f \geq deg\ g$ si procede per induzione sul grado di $f$, con base dell'induzione il grado di $g$ . Il caso base è una divisione euclidea (dove $h_1$ è il quoziente e risulta una costante, e $h_0$ il resto della divisione). Per il passo induttivo, supponiamo che l'enunciato sia vero fino a $n - 1 \geq deg\ g$ e supponiamo $deg\ f = n$. Sia $f = gq + r$ la divisione euclidea in $\mathbb{Q}[x]$, in cui dunque $deg\ r < deg\ g$. Dato che $g$ non è una costante, risulta che $deg\ q < deg\ f$ e si può scrivere, per ipotesi induttiva o per la osservazione iniziale (se $deg\ q < deg\ g$) che esiste un certo numero naturale $d'$ e certi polinomi $h'_0, ..., h'_{d'} \in \mathbb{Q}[x]$

$$q = \sum_{i=0}^{d'} h'_i g^i$$

Dunque, sostituendo nella divisione euclidea, abbiamo

$$f = gq + r = \sum_{i=0}^{d'} h'_i g^{i+1} + r$$

che dà l'espressione richiesta, ponendo $d = d' + 1$, $h_0 = r$ e $h_i = h'_{i-1}$ per $i \geq 1$.

Per il punto (2). Facendo la divisione euclidea in $\mathbb{Q}[x]$ fra $f$ e $g$ si ottiene

$$f = gq + r$$

con $deg\ r < deg\ g$ (ricordiamo che il grado di $g$ è $\geq 1$). I polinomi $q$ ed $r$ sono a coefficienti razionali. Se si moltiplica tutta l'equazione per il minimo comune multiplo $m$ dei coefficienti di $q$ si ottiene

$$mf = g(mq) + mr$$

da cui, poiché $mf, mq, g$ hanno coefficienti interi si ricava che anche $mr = mf - g(mq)$ ha coefficienti interi. Ora sappiamo che per ipotesi per ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale che $g(n)$ divide $f(n)$ e dunque divide anche $mr(n)$. Se $r$ fosse diverso dal polinomio costante 0, avremo che esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \geq 0$ vale $r(n) \neq 0$ e $g(n) \neq 0$, dunque $|g(n)| \leq |mr(n)|$. Ma allora definitivamente

$$1 \leq \frac{|mr(n)|}{|g(n)|}$$

che è assurdo visto che, per ragioni di grado, vale

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|mr(n)|}{|g(n)|} = 0$$

Dunque $r$ è il polinomio costante 0, ossia $g$ divide $f$ in $\mathbb{Q}[x]$. Considerando l'uguaglianza ottenuta nel punto precedente

$$f(x) = \sum_{i=0}^{d} h_i(x) g(x)^i$$

si ricava allora che

$$h_0 = f - \sum_{i=i}^{d} h_i g^i$$

e dunque $g$ divide $h_0$. Dato che il grado di $h_0$ è minore del grado di $g$, deve essere $h_0 = 0$.

Per il punto (3) è sufficiente mostrare un esempio, uno potrebbe essere il seguente:

$$f(x) = x^3 + x \qquad g(x) = 2x$$

vale

$$f(x) = \frac{1}{8} g(x)^3 + \frac{1}{2} g(x)$$

inoltre per $n = 0$ si ha $g(0) = 0$ divide $f(0) = 0$
mentre per $n \neq 0$ si ha

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n^2 + 1}{2} \frac{n}{n}$$

**Problema 5**

Per il punto (1), se le lampadine non sono già tutte di un solo colore, ci si può ridurre con al più una mossa al caso in cui i colori presenti sono solo 2. I casi da studiare sono allora, a meno di simmetrie, 0001, 0010, 0011, 0110, 0101 tutti con soluzione rapida.

Si osserva inoltre, in termini della rappresentazione dei colori con 0,1,2, che quando si preme il pulsante non cambia la somma modulo 3. Dunque se la somma modulo 3 dei colori della configurazione iniziale è $k$ (con $k = 0, 1, 2$), l'unica configurazione finale possibile è quella con quattro lampadine di colore $k$.

Per il punto (2), si nota innanzitutto che, visto che la somma modulo 3 della configurazione iniziale è 0, se si ottenesse una configurazione finale con 133 lampadine di colore $s$, dovrebbe valere che $133s$ è congruo a 0 modulo 3, dunque deve essere $s = 0$. Resta da verificare che si possa davvero ottenere una simile configurazione finale.

Consideriamo le prime quattro lampadine della circonferenza, in senso orario, a partire dalla lampadina da cui parte anche la coda, che chiameremo "lampadina speciale" ($\circ -$

$\circ - \circ - \circ$). Per il punto (1), comunque siano colorate all'inizio, è possibile portarle ad avere lo stesso colore, diciamo A. Consideriamo poi la quinta, la sesta la settima e l'ottava lampadina: di nuovo è possibile portarle tutte ad avere lo stesso colore. Se questo colore è diverso da $A$, diciamo B, si considerano adesso la quarta, la quinta, la sesta e la settima lampadina: le ultime tre sono di colore B, la prima è di colore A. Per il punto (1), e per le ragioni di congruenza modulo 3 lì notate, con opportune mosse possiamo portarle ad essere tutte di colore A. Notiamo che in ogni caso abbiamo ottenuto che le prime 7 lampadine sono di colore A. Seguendo questa procedura si arriva ad avere le prime 97 lampadine di colore A, dato che $97 = 4 + 3 \times 31$. Consideriamo adesso la 98-esima, 99-esima, 100-esima e la lampadina speciale e portiamole ad avere tutte lo stesso colore. Se è A abbiamo ottenuto tutte le lampadine della circonferenza di colore A. Se non è A ma, diciamo, X, si riconsiderano la 97-esima, la 98-esima, 99-esima, e la 100-esima e si possono portare tutte ad avere tutte colore A sempre per il punto (1). Dunque in questo momento tutte le lampadine hanno colore A eccetto la prima, quella speciale, che ha colore X. Adesso si ricomincia considerando la prima, la seconda, la terza e la quarta e si possono portare tutte al colore X. Dopodiché si considerano la quarta, la quinta, la sesta e la settima e di nuovo si possono portare al colore X. Infine si arriva, dato che $100 = 1 + 3 \times 33$, ad avere tutte le lampadine dello stesso colore X. Abbiamo concluso che si può ottenere che tutte le lampadine della circonferenza abbiamo lo stesso colore. Ora consideriamo le lampadine della coda, partendo da quella più in basso: con una procedura simile a quella illustrata sopra si può arrivare ad avere che tutte e 33 le lampadine della coda, e la "lampadina speciale", abbiano lo stesso colore, diciamo C, dato che $34 = 4+3\times10$. A questo punto, se $C = X$ abbiamo finito. Altrimenti, si nota che tutte le lampadine della circonferenza hanno colore X eccetto quella speciale che ha colore C. Come visto nella parte precedente, da questa configurazione è possibile ottenere, agendo solo sulla circonferenza, che anche tutte le altre lampadine della circonferenza abbiano colore C, e dunque tutte le lampadine del palloncino hanno colore C.

Il risultato si è ottenuto a partire da una qualunque configurazione iniziale, e il colore $C$ è determinato dalla classe di congruenza modulo 3 della configurazione iniziale: come abbiamo visto, nel nostro caso è 0.