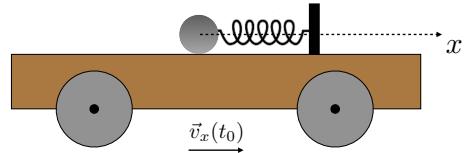


### Problema 1

Una particella di massa  $m = 0.15 \text{ kg}$  scorre senz'attrito sul piano orizzontale di un carrello. La particella è attaccata all'estremità di una molla di costante elastica  $k = 40 \text{ N/m}$ , la cui altra estremità è fissata al piano del carrello. La particella oscilla lungo l'asse  $x$  della figura, lungo cui giace la molla, con un'ampiezza delle oscillazioni  $\Delta x = 5 \text{ mm}$ ;



allo stesso tempo il carrello si muove di moto rettilineo uniforme nel piano orizzontale, anch'esso lungo l'asse  $x$  della figura, con velocità di componente  $v_x = 0.1 \text{ m/s}$  rispetto al laboratorio supposto inerziale. Al tempo  $t_0$ , mentre la particella sta passando per la posizione in cui la molla è a riposo nel verso positivo dell'asse  $x$ , il carrello urta un respingente e si arresta in maniera praticamente istantanea. Il tempo di arresto è così breve che la posizione della particella non ha tempo di cambiare. Si scriva la legge oraria della particella per  $t > t_0$  nel sistema di riferimento solidale al carrello con origine nella posizione della particella in cui la molla è a riposo.

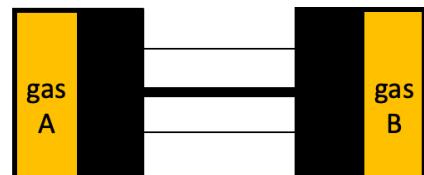
### Problema 2

Una particella puntiforme di massa  $m$  si muove sotto l'effetto di una forza centrale. Come è ben noto, il moto sotto l'effetto di una forza centrale si svolge su un piano. Si introduca un sistema di coordinate polari  $(r, \theta)$  sul piano dell'orbita, e si ponga l'origine nel centro della forza. In tale sistema di coordinate l'espressione generale della forza risulta  $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ , dove  $\hat{r}$  è il vettore unitario (versore) lungo la direzione radiale diretto nel verso in cui il valore di  $r$  cresce. Si consideri il caso specifico  $f(r) = -(\alpha/r^2) \exp[-r/r_0]$  e ci si limiti al caso  $\alpha > 0$ .

- (a) Determinare per quali valori di  $r_0$  sono ammesse orbite circolari stabili.
- (b) Si consideri una data orbita circolare stabile e se ne perturbi il moto lungo la direzione radiale. Trattando tale perturbazione come molto piccola, si calcoli la frequenza delle oscillazioni armoniche lungo la direzione radiale.
- (c) Si dia la condizione affinché tale orbita perturbata sia chiusa.

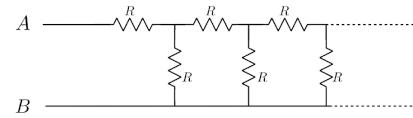
### Problema 3

Nel contenitore della figura il gas in A, monatomico, ha le coordinate termodinamiche  $V_0 = 20 \times 10^{-3} \text{ l}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T_0 = 290 \text{ K}$ ; esso non può scambiare calore con l'esterno. Il gas in B ha le stesse coordinate, ma è biammico e può scambiare calore con l'esterno. Il pistone può scorrere senza attrito. Con una trasformazione reversibile il gas in B viene portato al volume  $V_B = 25 \times 10^{-3} \text{ l}$ . Calcolare il calore scambiato dal gas in B.



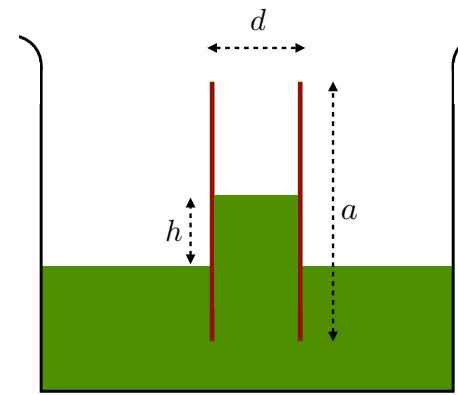
### Problema 4

Trovare la resistenza equivalente tra  $A$  e  $B$  della serie infinita di resistenza illustrata a lato.



### Problema 5

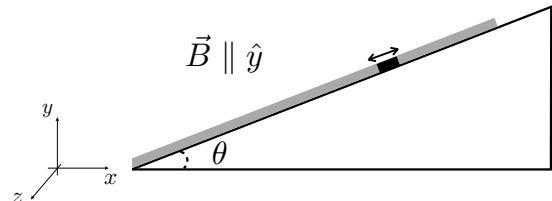
Un condensatore a facce piane ha ciascuna faccia di forma rettangolare con lati  $a$  e  $b$ , e la distanza tra le piastre è pari a  $d$ . Tale condensatore viene immerso come illustrato in figura all'interno di una bacinella dove è contenuto un fluido dielettrico. La densità di massa del fluido è  $\rho$ , la costante dielettrica relativa del mezzo è  $\epsilon_r$ . Inoltre, siano  $g$  il campo gravitazionale in prossimità delle superficie terrestre e  $\epsilon_0$  la costante dielettrica del vuoto. Si osserva che quando il condensatore è immerso nella bacinella, il fluido sale verticalmente fino a raggiungere un livello  $h$  rispetto alla superficie del fluido al di fuori del condensatore. Si calcoli il valore di  $h$  in funzione dei dati del problema nei due casi seguenti:



- (a) le piastre del condensatore sono tenute a una differenza di potenziale costante  $V$ ;
- (b) le piastre del condensatore hanno carica elettrica  $\pm Q$  e sono isolate.

### Problema 6

In un piano inclinato di angolo  $\theta = 30^\circ$  sono poste due rotaie parallele, distanti  $l = 20$  cm, di resistenza elettrica trascurabile e connesse elettricamente tra loro alla sommità. Su di esse può scorrere senza attrito una sbarretta conduttrice di massa  $m = 20$  g e resistenza elettrica  $R = 2\Omega$ . Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, diretto verticalmente, di modulo  $B = 0.6$  T. Ad un certo istante la sbarretta viene lasciata libera di scivolare lungo il piano inclinato. Si risponda ai quesiti successivi assumendo infinita la lunghezza del piano inclinato.



- (a) Si determini l'equazione del moto della sbarretta spiegando il significato fisico di ciascun contributo.
- (b) Si disegni su un grafico l'andamento qualitativo della velocità della sbarretta in funzione del tempo.
- (c) Cosa succede a tale velocità per tempi molto grandi?

### **Soluzione Problema 1**

Prima dell'urto, la particella si trova su un sistema di riferimento inerziale e compie un moto armonico dovuto alla forza esercitata dalla molla. L'urto avviene all'istante  $t_0$  quando la particella passa per la posizione in cui la molla è a riposo, e quindi quando la sua velocità (rispetto al carrello) è massima. Tale velocità può essere determinata in vari modi, ad esempio imponendo la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x \simeq 0.08 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (1)$$

All'istante dell'urto abbiamo un nuovo moto armonico dove la particella all'istante iniziale  $t_0$  si trova ancora nella posizione di equilibrio, ma la velocità è data dalla composizione dei due moti visto che poco prima dell'urto il carrello si trovata in moto con velocità  $v_x$ . Abbiamo quindi la legge oraria

$$x(t) = \frac{v_{\max} + v_x}{\omega} \sin[\omega(t - t_0)] , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (2)$$

Inserendo i valori numerici troviamo la legge oraria richiesta

$$x(t) = 11,1 \text{ mm} \times \sin \left[ 16.3 \times \frac{(t - t_0)}{\text{s}} \right] . \quad (3)$$

### **Soluzione Problema 2**

Risolveremo questo problema utilizzando due importanti principi di conservazione validi per le forze centrali. Per prima cosa osserviamo che il momento esercitato dalla forza rispetto a un polo fisso coincidente con il centro della forza risulta

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = f(r) \vec{r} \times \hat{r} = 0 . \quad (4)$$

Ne deduciamo che il momento angolare è costante. Allo stesso modo, essendo la forza sempre diretta lungo la direzione radiale e avente modulo che dipende solo dalla coordinata radiale, possiamo sempre esprimerla come il gradiente di un campo scalare

$$f(r) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} . \quad (5)$$

Di conseguenza anche l'energia meccanica è conservata. Utilizzando coordinate polari, e indicando le derivate temporali con la notazione seguente

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} , \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} , \quad (6)$$

abbiamo che il modulo del momento angolare  $L$  e l'energia  $E$  risultano date dalle espressioni

$$L = m\dot{\theta}r^2 , \quad (7)$$

$$E = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 \right) + U(r) . \quad (8)$$

Sostituendo l'espressione del momento angolare dentro quella dell'energia troviamo

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) , \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) . \quad (9)$$

Di fatto abbiamo ricondotto il problema a uno equivalente unidimensionale nella sola variabile  $r$  dove l'energia potenziale risulta data dalla funzione  $U_{\text{eff}}(r)$ . Le orbite circolari si avranno per soluzioni dove la coordinata  $r$  non varia, e quindi saranno stabili se ci collochiamo presso un minimo del potenziale efficace  $U_{\text{eff}}(r)$ . Per trovare il raggio dell'orbita circolare dobbiamo quindi imporre la seguente condizione

$$\left. \frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{L^2}{mR^3} - f(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L^2}{m\alpha} = R \exp[-R/r_0] . \quad (10)$$

Questa condizione non è sufficiente a garantire la stabilità dell'orbita. Vogliamo infatti che tale orbita sia stabile e tal fine dobbiamo imporre l'ulteriore condizione

$$\left. \frac{d^2U_{\text{eff}}(r)}{dr^2} \right|_{r=R} > 0 \quad \Rightarrow \quad 3\frac{L^2}{mR^4} - \left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=R} > 0 . \quad (11)$$

Facendo la derivata e sostituendo la condizione di stazionarietà troviamo la disuguaglianza

$$3\frac{L^2}{mR^4} - \frac{\alpha}{R^3} \left( 2 + \frac{R}{r_0} \right) \exp[-R/r_0] > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L^2}{mR^4} \left( 1 - \frac{R}{r_0} \right) > 0 . \quad (12)$$

Quindi avremo orbite circolari stabili soltanto per  $R < r_0$ .

Andiamo ora a considerare una traiettoria perturbata rispetto a quella stabile circolare. Per prima cosa è utile ricavare l'equazione del moto che descrive l'evoluzione della coordinata radiale, e lo facciamo a partire dalla conservazione dell'energia

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{r} \left[ m\ddot{r} + \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} \right] = \dot{r} \left[ m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} \right] = 0 . \quad (13)$$

Troviamo quindi l'equazione del moto per la coordinata radiale

$$m\ddot{r} = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \exp[-r/r_0] . \quad (14)$$

Definiamo la generica orbita perturbata come  $r = R + \delta$  (dove  $\delta \ll R$ ). Per prima cosa poniamo  $\delta = 0$  e quindi  $r = R = \text{const}$ , e questo ci fornisce la relazione già trovata in Eq. (10) per l'orbita circolare. Consideriamo l'orbita perturbata, e a tal fine è utile utilizzare le due identità  $(1 + x)^n \simeq 1 + nx$  e  $e^x \simeq 1 + x$  valide entrambe per  $x \ll 1$ . In particolareabbiamo

$$\frac{L^2}{mr^3} = \frac{L^2}{m(R + \delta)^3} = \frac{L^2}{mR^3} \left( 1 - 3\frac{\delta}{R} \right) , \quad (15)$$

$$\frac{\alpha}{r^2} \exp[-r/r_0] = \frac{\alpha}{(R + \delta)^2} \exp[-R/r_0] \exp[-\delta/r_0] \simeq \frac{\alpha}{R^2} \exp[-R/r_0] \left( 1 - 2\frac{\delta}{R} - \frac{\delta}{r_0} \right) . \quad (16)$$

L'equazione del moto perturbata risulta quindi

$$m\ddot{\delta} = \frac{L^2}{mR^3} \left( 1 - 3\frac{\delta}{R} \right) - \frac{\alpha}{R^2} \exp[-R/r_0] \left( 1 - 2\frac{\delta}{R} - \frac{\delta}{r_0} \right) . \quad (17)$$

Rimuoviamo il termine indipendente da  $\delta$  visto che si semplifica per via del risultato in Eq. (10). Utilizzando la stessa equazione, possiamo semplificare l'equazione del moto

$$m\ddot{\delta} = -\frac{L^2}{mR^4} \left(1 - \frac{R}{r_0}\right) \delta . \quad (18)$$

Quindi la frequenza di queste oscillazioni si può scrivere come

$$\omega_{\text{pert}} = \frac{L}{mR^2} \sqrt{1 - \frac{R}{r_0}} . \quad (19)$$

Torniamo un passo indietro e consideriamo il moto lungo la direzione angolare. Abbiamo

$$\omega_{\text{rot}} = \frac{L}{mR^2} . \quad (20)$$

Le orbite saranno chiuse quando il rapporto tra queste due frequenze è un numero razionale.

### Soluzione Problema 3

Conosciamo le variabili termodinamiche dei gas contenuti in entrambi i recipienti, possiamo quindi calcolare anche il numero di moli presenti in ciascuna parte

$$n = \frac{p_0 V_0}{R T_0} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 20 \times 10^{-6} \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 290 \text{ K}} = 8.3 \times 10^{-4} \text{ mol} . \quad (21)$$

Per ipotesi il gas contenuto nel contenitore A non può scambiare calore con l'esterno. La trasformazione descritta nel problema per il gas A sarà quindi un'adiabatica reversibile dove il volume finale risulta (la somma dei volumi deve rimanere costante dato come si muove il pistone)

$$V_A = 2V_0 - V_B = 15 \times 10^{-6} . \quad (22)$$

Possiamo allora calcolare le variabili termodinamiche del gas nello stato finale (ricordiamo che il gas in A è monoatomico)

$$p_A = p_0 \left(\frac{V_0}{V_A}\right)^{5/3} = 1.6 \times 10^5 \text{ Pa} , \quad (23)$$

$$T_A = \frac{p_A V_A}{n R} = 351 \text{ K} . \quad (24)$$

Al termine delle trasformazione, la pressione in A e in B deve essere la stessa perché il sistema è in equilibrio. Le variabili termodinamiche del gas presente nella porzione B nello stato finale saranno

$$p_B = p_A = 1.6 \times 10^5 \text{ Pa} , \quad (25)$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{n R} = 586 \text{ K} . \quad (26)$$

Il calore scambiato dal gas in B può essere calcolato dal primo principio della termodinamica

$$Q = L_B + \Delta U_B = L_B + \frac{5}{2} n R (T_B - T_0) . \quad (27)$$

Nell'equazione qui sopra abbiamo utilizzato il fatto che il gas in B è biatomico e quindi il calore specifico molare a volume costante risulta  $c_V^{(B)} = 5R/2$ . Resta da calcolare il lavoro svolto dal gas

B nella trasformazione. Esso deve risultare uguale e opposto a quello svolto da A, e ricordiamo che la trasformazione del gas in A è adiabatica

$$L_B = -L_A = \Delta U_A = \frac{3}{2}nR(T_A - T_0) . \quad (28)$$

Concludiamo con il valore numerico del calore scambiato

$$Q = L_B + \Delta U_B = \frac{3}{2}nR(T_A - T_0) + \frac{5}{2}nR(T_B - T_0) = 5.7 \text{ J} . \quad (29)$$

### Soluzione Problema 4

Chiamiamo  $R_{\text{tot}}$  la resistenza dell'intero sistema. Rimuoviamo dal totale il primo blocco, e il pezzo rimanente ha ancora una resistenza totale  $R_{\text{tot}}$  perché il sistema è infinito. Questo ci conduce alla relazione di consistenza

$$R_{\text{tot}} = R + \frac{RR_{\text{tot}}}{R + R_{\text{tot}}} \quad \Rightarrow \quad R_{\text{tot}}^2 - RR_{\text{tot}} - R^2 = 0 . \quad (30)$$

Troviamo il risultato finale

$$R_{\text{tot}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}R . \quad (31)$$

### Soluzione Problema 5

Una volta che il condensatore viene immerso nel dielettrico esso subisce una forza verso l'alto che verrà contrastata dalla forza peso. La condizione di equilibrio sarà data dall'equazione

$$F_i = \rho g \times b d h . \quad (32)$$

In questa notazione,  $F_i$  è la forza subita dal dielettrico nei casi  $i = a, b$ . Non ci resta che calcolare questa forza. La configurazione descritta è assimilabile a due condensatori piani disposti in parallelo (uno dove è presente il dielettrico e l'altro dove è presente il vuoto). Si  $l$  la lunghezza della parte del condensatore immersa all'interno del dielettrico (cioè la parte sotto il livello della superficie del fluido). Abbiamo per le due capacità le espressioni

$$C_{\text{vac}} = \epsilon_0 \frac{(a - h - l)b}{d} , \quad (33)$$

$$C_{\text{diel}} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{(h + l)b}{d} . \quad (34)$$

La capacità totale del sistema risulta quindi

$$C_{\text{eq}} = C_{\text{vac}} + C_{\text{diel}} = \epsilon_0 \frac{b}{d} [a + (\epsilon_r - 1)(h + l)] . \quad (35)$$

Dobbiamo calcolare la forza che richiama la parte di dielettrico verso l'interno. Consideriamo di spostare di una quantità piccola  $\delta x$  la parte di fluido per effetto della suddetta forza. Abbiamo quindi che l'energia potenziale del sistema deve variare secondo la relazione

$$F_i \delta x + \delta U = V d Q . \quad (36)$$

In questo caso,  $U$  è l'energia potenziale elettrostatica immagazzinata nel conservatore (l'equazione in alto è identica a quella che descrive il processo di carica del condensatore nel caso in cui la forza è assente. Dividiamo ora la discussione in due casi. Nel primo caso abbiamo la differenza di potenziale costante e quindi  $\delta U = (V^2/2)\delta C$ . Troviamo quindi

$$F_a = \frac{1}{2}V^2 \frac{dC_{\text{eq}}}{dx} = \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_r - 1)V^2 \frac{b}{d} . \quad (37)$$

Nel secondo caso invece non c'è trasferimento di carica  $\delta Q = 0$  e quindi

$$F_b = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\text{eq}}^2} \frac{dC_{\text{eq}}}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{\text{eq}}^2} \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{b}{d} . \quad (38)$$

A questo punto torniamo al risultato in Eq. (32) e determiniamo l'altezza raggiunta dal fluido nei due casi. Nel primo caso ( $i = a$  e quindi differenza di potenziale costante) abbiamo

$$h_a = \frac{F_a}{\rho g \times b d} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)V^2}{2\rho g d^2} . \quad (39)$$

Nel secondo caso ( $i = b$  e quindi carica sulle armature costante) abbiamo

$$h_b = \frac{F_b}{\rho g \times b d} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{2\epsilon_0\rho g b^2} \frac{Q^2}{[a + (\epsilon_r - 1)(h_b + l)]^2} . \quad (40)$$

In questo caso  $h_b$  dipenderà dalla porzione inserita  $l$  ed è implicitamente data dall'equazione sopra.

## Soluzione Problema 6

La sbarretta può muoversi soltanto lungo il piano inclinato e quindi è conveniente introdurre una ascissa curvilinea  $s$  che denota la distanza dal punto in cui il piano inclinato incontra il pavimento. All'istante iniziale quindi la sbarretta si trova a distanza  $s_0$  da tale punto. L'equazione del moto per la sbarretta avrà la forma

$$m\ddot{s} = F_{\text{peso}}^{\parallel} + F_{\text{Lorentz}}^{\parallel} . \quad (41)$$

Abbiamo proiettato l'equazione del moto lungo la direzione dell'ascissa curvilinea, e in tale direzione le reazioni vincolari sono nulle (ricordiamo che non c'è attrito). Le forze che hanno componenti non nulle, la forza peso e la forza di Lorentz, le esaminiamo adesso. Iniziamo dalla forza peso che ha una componente non nulla lungo il verso negativo della coordinata curvilinea  $s$  che risulta

$$F_{\text{peso}}^{\parallel} = -mg \sin \theta . \quad (42)$$

L'origine della forza di Lorentz è la corrente che viene indotta nel circuito e che utilizzando la legge di Faraday risulta (orientiamo la normale alla superficie del circuito in direzione uscente dal piano inclinato, e il verso di percorrenza positivo in accordo con la regola del cacciavite)

$$i = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{Bl\dot{s}}{R} \cos \theta . \quad (43)$$

Analizzando il sistema di coordinate Cartesiane illustrato nella figura, è immediato vedere come la corrente nella sbarretta è orientata come essa e quindi nella direzione delle  $z$ . Il verso è determinato

dalla legge di Lenz, e secondo le nostra convenzioni risulta positivo quando la corrente scorre nel verso negativo delle  $z$ . Possiamo allora determinare la Forza di Lorentz che agisce sulla sbarretta

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = B l (-\hat{z}) \times \hat{y} = -\frac{B^2 l^2 \dot{s}}{R} \cos \theta \hat{x}. \quad (44)$$

Vediamo che la forza di Lorentz è diretta nel verso positivo dell'asse  $x$  e che quindi agisce come una forza di attrito. La proiezione lungo il piano inclinato risulta infine ( $\hat{s}$  è il versore diretto lungo la direzione positiva della coordinata curvilinea  $s$ )

$$F_{\text{Lorentz}}^{\parallel} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} \cdot \hat{s} = -\frac{B^2 l^2 \cos^2 \theta}{R} \dot{s}. \quad (45)$$

Scriviamo l'equazione del moto nella sua forma finale per la velocità della sbarretta ( $v_s \equiv \dot{s}$ )

$$\frac{dv_s}{dt} = -g \sin \theta - \frac{B^2 l^2 \cos^2 \theta}{m R} v_s. \quad (46)$$

L'andamento qualitativo della velocità è il seguente: inizialmente parte da un valore nullo, e il termine dovuto alla forza peso vince sull'altro e quindi  $\dot{s}$  inizia a diventare negativo. Questa crescita sarà piano piano contrastata dal secondo termine del membro di destra che con il tempo acquisterà un valore sempre maggiore. Più precisamente, si può risolvere l'equazione differenziale (anche se non richiesto dall'esercizio) per trovare la dipendenza esatta della velocità dal tempo

$$v_s(t) = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 l^2 \cos^2 \theta} \left[ \exp \left( -\frac{B^2 l^2 \cos^2 \theta}{mR} t \right) - 1 \right]. \quad (47)$$

A tempi molto grandi, il termine esponenziale diventa sempre più piccolo e si può trascurare. La velocità raggiunge un valore asintotico. Questo si poteva anche dedurre dall'equazione del moto, senza dover risolvere l'equazione differenziale, in quanto corrisponde alla condizione che la velocità non cambia nel tempo ( $dv_s/dt$ ). Concludiamo che la velocità a tempi molto grandi raggiunge il valore asintotico (il segno negativo è dovuto alle nostre convenzioni)

$$v_s^{\infty} = -\frac{mgR \sin \theta}{B^2 l^2 \cos^2 \theta} = 18.1 \text{ m/s}. \quad (48)$$