Esame di Selezione A.A. 2023-2024

Esercizio 1
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ (con $n \geq 0$) si consideri il seguente integrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$$

1. dimostrare che $I_n > 0$
2. dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale

$$I_n + I_{n-1} = \frac{1}{n}$$

Esercizio 2
Si consideri la famiglia parametrica di funzioni reali di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x} & -1 \leq x \leq 0 \\ (x/2 - a)/(bx + 1) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

dove i parametri a, b sono dei numeri reali (ovvero $a, b \in \mathbb{R}$)

1. Si dica se esistono dei valori da assegnare ai parametri in modo che la funzione $f(x)$ soddisfi alle **ipotesi** del Teorema di Lagrange
2. Fissati i valori dei parametri $a = 0$ e $b = -1/2$, si dimostri, se possibile, che non esiste nessun numero reale $c \in (-1, 1)$ che soddisfa alla **tesi** del Teorema di Lagrange

Esercizio 3
Si considerino le due funzioni reali di variabile reale

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 9}$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & x < 4 \\ \sqrt{x^2 - 4x} & x \geq 4 \end{cases}$$

Si trovino tutti i numeri reali $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano alla sequente disequazione

$$f(|x|) \leq g(-2x)$$

SOLUZIONI

Esercizio 1
Svolgimento

Il denominatore è strettamente positivo in tutto $[0,1]$ mentre:

- se $n = 0$ anche il numeratore è strettamente positivo in tutto $[0,1]$
- se $n \geq 1$ il numeratore è strettamente positivo in $(0,1]$

quindi trascurando al più un insieme di misura nulla $\{0\}$ la funzione integranda è sempre strettamente positiva.

Per $n \geq 1$ scriviamo la relazione

$$I_n + I_{n-1}$$

in modo esplicito

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+1}dx$$

per l'additività dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+1}(x+1)dx = \int_0^1 x^{n-1}dx = [\frac{x^n}{n}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n}$$

Esercizio 2

Svolgimento

$$f(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{1-x} & -1 \le x \le 0 \\ (x/2-a)/(bx+1) & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione $1-\sqrt{1-x}$ ha come dominio $(-\infty, 1]$ quindi è sempre definita in $[-1, 0]$.

Invece la funzione $(x/2-a)/(bx+1)$:

- se $b = 0$ ha come dominio $(-\infty, +\infty)$;
- se $b \neq 0$ ha come dominio $(-\infty, -1/b) \cup (-1/b, +\infty)$

quindi la funzione è ben definita in $(0, 1]$ se e solo se

- $b = 0$
- $-1/b \le 0$ oppure $-1/b \ge 1$

Questa ultima relazione equivale a $b > 0$ oppure $-1 \le b < 0$. Quindi la funzione è definita in tutto $[-1, 1]$ se e solo se $b \ge -1$.

La funzione $f(x)$ è continua in $[-1, 0]$ ed è continua anche in $(0, 1]$. Per studiare la continuità per $x = 0$ dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} (x/2-a)/(bx+1) = -a$$

e questo deve coincidere con il valore della funzione nel punto ovvero $f(0) = 0 = -a$. Abbiamo quindi: $a = 0$.

La funzione $f(x)$ è derivabile in $(-1, 0)$ ed è derivabile anche in $(0, 1)$. Per studiare la derivabilità per $x = 0$ dobbiamo studiare come queste due funzioni si raccordano in questo punto.

Se $b = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1/\left[2\sqrt{1-x}\right] & -1 < x < 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

se $b \neq 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1/\left[2\sqrt{1-x}\right] & -1 < x < 0 \\ 1/\left[2(bx-1)^2\right] & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Osserviamo che le due derivate si raccordano per continuità per ogni valore ammissibile di b. Quindi la funzione soddisfa alle **ipotesi** del Teorema di Lagrange per $a = 0$ e per $b \ge -1$.

Osserviamo che i valori dei parametri $a = 0$ e $b = -1/2$ rientrano tra quelli individuati nel passo precedente quindi per questa coppia di valori la funzione soddisfa alle ipotesi del Teorema di Lagrange. A questo punto dovrà essere soddisfatta anche la tesi del Teorema di Lagrange e quindi non è possibile dimostrare quanto richiesto dal testo.

Esercizio 3
Svolgimento

Osserviamo che

$$f(|x|) = \begin{cases} 3|x| - 3 & |x| < 4 \\ \sqrt{x^2 - 4|x|} & |x| \geq 4 \end{cases}$$

ovvero

$$f(|x|) = \begin{cases} 3|x| - 3 & -4 < x < 4 \\ \sqrt{x^2 - 4|x|} & (x \geq 4) \vee (x \leq -4) \end{cases}$$

mentre

$$g(-2x) = \sqrt{4x^2 + 9}$$

Scriviamo allora la nostra disequazione

$$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ 3|x| - 3 \leq \sqrt{4x^2 + 9} \end{cases} \vee \begin{cases} (x \geq 4) \vee (x \leq -4) \\ \sqrt{x^2 - 4|x|} \leq \sqrt{4x^2 + 9} \end{cases}$$

Concentriamoci sul primo sistema

$$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ 3|x| - 3 \leq \sqrt{4x^2 + 9} \end{cases}$$

possimo trasformarla nella seguente coppia di sistemi

$$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ 3|x| - 3 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ 3|x| - 3 \geq 0 \\ (3|x| - 3)^2 \leq 4x^2 + 9 \end{cases}$$

Il secondo sistema può essere ulteriormente diviso in due ottenendo

$$\begin{cases} -4 < x < 4 \\ -1 < x < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \geq 1 \\ (3x - 3)^2 \leq 4x^2 + 9 \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \leq -1 \\ (-3x - 3)^2 \leq 4x^2 + 9 \end{cases}$$

Svolgendo i conti

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 18/5 \end{cases} \vee \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \leq -1 \\ -18/5 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Concludendo questo caso ci fornisce la seguente soluzione

$$-18/5 \leq x \leq 18/5$$

Passiamo ora al sistema

$$\begin{cases} (x \geq 4) \vee (x \leq -4) \\ \sqrt{x^2 - 4\,|x|} \leq \sqrt{4x^2 + 9} \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x^2 - 4x} \leq \sqrt{4x^2 + 9} \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -4 \\ \sqrt{x^2 + 4x} \leq \sqrt{4x^2 + 9} \end{cases}$$

Osserviamo che $x^2 - 4x \geq 0$ se e solo se $(x \leq 0) \vee (x \geq 4)$,mentre $x^2 + 4x \geq 0$ per ogni numero reale x,quindi:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 4x \leq 4x^2 + 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -4 \\ x^2 + 4x \leq 4x^2 + 9 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ 3x^2 + 4x + 9 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -4 \\ 3x^2 - 4x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

Visto che il discriminante di entrambe queste parabole è negativo otteniamo

$$(x \geq 4) \vee (x \leq -4)$$

Concludendo la soluzione è

$$(x \leq -4) \vee (-18/5 \leq x \leq 18/5) \vee (x \geq 4)$$