Esame di Selezione A.A. 2022-2023

Esercizio 1
Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, numero naturale, vale la seguente disuguaglianza

$$n < 2^n$$

Esercizio 2
Si consideri la famiglia parametrica di funzioni reali di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) + c & 1 < x \leq e \end{cases}$$

dove $\ln(x)$ rappresenta il logaritmo naturale di x, mentre i parametri a, b, c sono dei numeri reali (ovvero $a, b, c \in \mathbb{R}$)

1. Si dica per quale valore dei parametri questa funzione soddisfa alle **ipotesi** del Teorema di Rolle.

2. Si dica per quale valore dei parametri questa funzione soddisfa alla **tesi** del Teorema di Rolle.

Esercizio 3
Si considerino le due funzioni reali di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{x}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$$

Se possibile si determini una forma esplicita per la funzione composta $f \circ g$ e, sempre se possibile, per la funzione composta $g \circ f$. **Esercizio 4**

Si consideri la successione di funzioni reali di variabili reali

$$f_n(x) = xe^{-nx}$$

1. Per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si individui il sottoinsieme del dominio in cui la funzione è crescente.

2. Per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si individui il sottoinsieme del dominio in cui la funzione è convessa.

3. Definiamo per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 1$ e per ogni numero reale $t \in]0, +\infty[$ la funzione

$$A_n(t) = \int_0^t f_n(x)dx$$

si calcoli, se esiste,

$$\lim_{t \mapsto +\infty} A_n(t)$$

SOLUZIONI

Esercizio 1
Svolgimento

Per $n = 0$ abbiamo $0 < 2^0 = 1$, quindi la disuguaglianza è vera. Ipotizziamola vera fino ad n e dimostriamola per $n + 1$.

$$n < 2^n$$

sommando ad ambo i membri 1 ottengo

$$n + 1 < 2^n + 1$$

Per concludere mi basta dimostrare che

$$2^n + 1 \leq 2^{n+1}$$

che è equivalente a

$$1 + \frac{1}{2^n} \leq 2$$

se e solo se

$$\frac{1}{2^n} \leq 1$$

ovvero

$$1 \leq 2^n$$

Esercizio 2
Svolgimento

Osserviamo che $f(0) = 0$ per ogni valore dei parametri, mentre $f(e) = 1 + c$; quindi affinchè $f(0) = f(e)$ deve essere $c = -1$.

La funzione $f(x)$ è continua in $[0, 1]$ ed è continua anche in $]1, e]$. Per studiare la continuità per $x = 1$ dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \mapsto 1^+} f(x) = \lim_{x \mapsto 1^+} (\ln(x) - 1) = -1$$

e questo deve coincidere con il valore della funzione nel punto ovvero $f(1) = a+b$. Abbiamo una prima relazione tra i parametri: $a + b = -1$.

La funzione $f(x)$ è derivabile in $]0, 1[$ ed è derivabile anche in $]1, e[$. Per studiare la derivabilità per $x = 1$ dobbiamo studiare come queste due funzioni si raccordano in questo punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & 0 < x < 1 \\ 1/x & 1 < x < e \end{cases}$$

Calcoliamo i due limiti e imponiamo che il valore sia lo stesso

$$\lim_{x \mapsto 1^-} f'(x) = \lim_{x \mapsto 1^-} (2ax + b) = 2a + b$$

mentre

$$\lim_{x \mapsto 1^+} f(x) = \lim_{x \mapsto 1^+} (1/x) = 1$$

Abbiamo una seconda relazione tra i parametri: $2a+b = 1$. Affinchè la funzione soddisfi alle ipotesi del Teorema di Rolle queste tre condizioni devono valere contemporaneamente, quindi, dopo aver risolto un sistema, otteniamo $a = 2, b = -3, c = -1$.

Ricordiamo che il Teorema di Rolle esprime condizioni sufficienti, ma non necessarie affinchè esista un punto interno al dominio della funzione in cui la derivata prima si annulla. Quindi, oltre alla scelta individuata al punto precedente $a = 2, b = -3, c = -1$, potrebbero esserci delle altre scelte dei parametri che rendono vera la tesi. Osserviamo che per ogni scelta dei parametri

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & 0 < x < 1 \\ 1/x & 1 < x < e \end{cases}$$

La derivata prima non potrà mai essere nulla nell'intervallo $]1, e[$, mentre nell'intervallo $]0, 1[$ la derivata si annulla per $x = -b/2a$ (abbiamo ipotizzato che $a \neq 0$). Questo valore deve essere contenuto nell'intervallo $]0, 1[$, quindi abbiamo

$$\begin{cases} -b/2a > 0 \\ -b/2a < 1 \end{cases}$$

Che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} b < 0 \\ b > -2a \\ a > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} b > 0 \\ b < -2a \\ a < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -2a < b < 0 \\ a > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < b < -2a \\ a < 0 \end{cases}$$

Concludendo la tesi del Teorema di Rolle è soddisfatta se e solo se $c \in \mathbb{R}$ e contemporaneamente i parametri a, b soddisfano uno dei due sistemi appena individuati.

Esercizio 3
Svolgimento

Iniziamo calcolando il dominio e l'immagine delle due funzioni. Sono funzioni elementari, quindi il loro grafico è deducibile in modo diretto dalle funzioni elementari che le compongono.

Il dominio di f è $[0, +\infty[$, mentre l'immagine di f è $[0, +\infty[$.

Il dominio di g è $[0, +\infty[$, mentre l'immagine di g è $]-1, +\infty[$.

La funzione $f \circ g$ esiste se e solo se l'immagine di g è contenuta nel dominio di f, quindi questa funzione **non** esiste.

La funzione $g \circ f$ esiste se e solo se l'immagine di f è contenuta nel dominio di g, quindi questa funzione esiste.

Il calcolo esplicito della funzione richiede di risolvere varie disequazioni:

$$g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{1 - f(x)} & 0 \leq f(x) \leq 1 \\ f^2(x) - 2 & f(x) > 1 \end{cases}$$

ovvero

$$g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{1 - \sqrt{x}} & 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \\ (\sqrt{x})^2 - 2 & \sqrt{x} > 1 \end{cases}$$

concludendo

$$g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{1 - \sqrt{x}} & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2 & x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 4
Svolgimento

Per $n = 0$ la funzione è una retta che risulta quindi una funzione crescente e convessa per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $n \geq 1$ scriviamo:

$$f_n'(x) = e^{-nx} + xe^{-nx}(-n) = e^{-nx}(1 - nx)$$

e questa è una funzione crescente nell'intervallo $1 - nx \geq 0$ ovvero $x \leq 1/n$.
Per $n \geq 1$scriviamo:

$$f_n''(x) = -ne^{-nx}(1 - nx) + e^{-nx}(-n) = -ne^{-nx}(2 - nx)$$

e questa è una funzione convessa nell'intervallo $2 - nx \leq 0$ ovvero $x \geq 2/n$.
Calcoliamo l'integrale per parti:

$$A_n(t) = \int_0^t xe^{-nx}dx = \int_0^t x\frac{d}{dx}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]dx$$

ovvero

$$\left[-\frac{xe^{-nx}}{n}\right]_0^t - \int_0^t -\frac{e^{-nx}}{n}dx = -\frac{te^{-nt}}{n} + \frac{1}{n}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^t$$

quindi

$$A_n(t) = -\frac{te^{-nt}}{n} - \frac{e^{-nt}}{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

Per calcolare il limite devo prima analizzare il primo addendo (gli altri due sono banali).

$$\lim_{t \mapsto +\infty} -\frac{te^{-nt}}{n} = \lim_{t \mapsto +\infty} -\frac{t}{ne^{nt}} = 0$$

concludendo

$$\lim_{t \mapsto +\infty} A_n(t) = \frac{1}{n^2}$$