SELEZIONE PER L'AMMISSIONE ALLA SCUOLA GALILEIANA
PROVA DI MATEMATICA
A.A. 2024-2025

Problema 1. Si determinino le soluzioni comuni delle seguenti equazioni:

$$5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x = 0$$
$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

Problema 2. Per quali interi positivi M esistono a, b e c interi tali che le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

- $MCD(a, b, c) = M$
- per ogni x intero $ax^2 + bx + c$ è un multiplo di 2024

(dove $MCD(a, b, c)$ indica il massimo comun divisore dei numeri a, b e c)

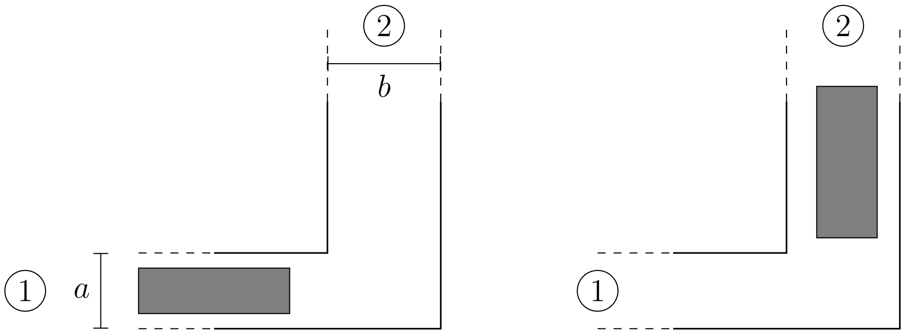
Problema 3. Dato $N \geq 3$ intero consideriamo l'insieme $\Gamma_N := \{1, 2, \dots, N\}$.
Diremo che una partizione $\{A,\ B\}$ di Γ_N ($A \cup B = \Gamma_N$ e $A \cap B = \emptyset$) è *aperta* se per ogni a, b, c elementi distinti in A o elementi distinti in B vale $a + b \neq c$. Per quali valori di $N \geq 3$ l'insieme Γ_N ammette una partizione *aperta*?

Problema 4.

(a) Sia dato un poligono convesso. Dimostrare che per ogni punto P interno al poligono esiste un lato del poligono AB tale che l'altezza PH del triangolo ABP cade all'interno del segmento AB.

(b) Sia dato un poliedro convesso. Dimostrare che per ogni punto P interno al poliedro esiste una faccia α del poliedro tale che la retta r ortogonale ad α e passante per P interseca α.

Problema 5. Si vuole spostare un tavolo dal corridoio 1 al corridoio 2, rispettivamente di ampiezza a e b , come in figura. Il tavolo è, visto dall'alto, rettangolare, ed ha dimensioni ℓ per 1.(Chiaramente l'angolo tra i due corridoi è retto)



(1) Se $a = 2$ e $b = 2$, qual è la massima lunghezza ℓ (ideale) tale per cui si riesce a compiere lo spostamento ?

(2) Se $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$ ed $\ell = 4$, si riesce a compiere lo spostamento?

Problema 6.

(a) Siano dati sul piano una circonferenza γ e due punti A e B tali che la retta passante per A e B non intersechi γ. Sia C il punto di γ che minimizza il perimetro del triangolo ABC e sia r la retta tangente a γ in C.
Si dimostri che i segmenti AC e BC formano con la retta r due angoli uguali.

(b) Sul piano sia assegnato un quadrato $DEFG$ di lato l. Siano poi γ_D e γ_E due circonferenze di centro rispettivamente D e E e raggio $\frac{l}{6}$. Siano infine I e J due punti delle circonferenze γ_D e γ_E che minimizzano il perimetro del quadrilatero $GIJF$.
Calcolare il perimetro del quadrilatero $GIJF$ specificando la lunghezza di ciascun lato.

Soluzioni

Problema 1
Ci sono molti modi per risolvere questo problema, illustreremo una soluzione che non fa uso dei numeri complessi.
È immediato che $x = 0$ è soluzione di entrambe le equazioni. Dimostrero che $x = 0$ è l'unica soluzione del sistema. Consideriamo ora il caso $x \neq 0$, possiamo dividere entrambe le equazioni per x e otteniamo:

$$\begin{cases} 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

sommando le due equazioni e dividendo per 6 si ottiene

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \tag{2}$$

sottraendo quest'ultima dal sistema precedente e dividendo poi la prima equazione per x si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

procediamo ora come da (1) a (3) tre volte

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow 1 = 0$$

Dunque il sistema ha un'unica soluzione $x = 0$.

Problema 2
La soluzione al problema è M multiplo di 1012.
Prima di tutto osserviamo che se per un certo M esistono a, b e c che soddisfano le due condizioni della traccia allora $a' = ka$, $b' = kb$ e $c' = kc$, soddisfano le due condizioni della traccia per $M' = kM$.

Dimostriamo con un esempio che $M = 1012$ soddisfa le condizioni richieste.

$$a = 1012 \qquad b = 1012 \qquad c = 0$$

in questo caso si ha $ax^2 + bx + c = 1012x(x + 1)$ e almeno un fattore tra x e $x + 1$ è pari.

Mostriamo ora che la condizione M multiplo di 1012 è necessaria. Consideriamo i casi $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$

$$\begin{aligned} a - b + c &\equiv 0 \quad (mod\ 2024) \\ c &\equiv 0 \quad (mod\ 2024) \\ a + b + c &\equiv 0 \quad (mod\ 2024) \end{aligned}$$

ricaviamo ora dalle congruenze precedenti una congruenza per la sola variabile a. Sommiamo la prima alla terza e sottraiamo il doppio della seconda così da ottenere:

$$2a \equiv 0 \quad (mod\ 2024)$$

ovvero a multiplo di 1012 in maniera analoga si ottiene b multiplo di 1012.

Problema 3

La soluzione del problema è Γ_N ammette una partizione *aperta* se e solo se vale $N \leq 8$. La dimostrazione consta di due parti: (a) occorre dimostrare che per $N = 8$ esiste una partizione *aperta*; (b) occorre dimostrare che per $N = 9$ non esiste una partizione aperta. Dimostrazione (a). Basta mostrare una partizione *aperta*:

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 4, 8\} \\ B = \{3, 5, 6, 7\} \end{cases}$$

Dimostrazione (b). Occorre considerare i vari casi. Questo può essere fatto in tantissimi modi. Qui procederemo fissando il numero 1 in A e poi considerando i possibili casi per il 2 e il 4. Casi possibili per il 2 e il 4, essi possono essere entrambi in A, entrambi in B oppure una in A e uno in B.
Il secondo sistema (Caso 1) è ottenuto dal primo imponendo A *aperto* mentre il terzo è stato ottenuto considerando B *aperto* nel secondo sistema, infine il terzo sistema produce una contraddizione.
Caso 1)

$$\begin{cases} A = \{1, 2, 4, \dots\} \\ B = \{\dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \{1, 2, 4, \dots\} \\ B = \{3, 5, 6 \dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \{\color{red}{1}, 2, 4, \color{red}{8}, \color{red}{9} \dots\} \\ B = \{3, 5, 6 \dots\} \end{cases}$$

Procediamo con i casi 2) 3) e 4) come per il caso 1) imponendo alternativamente A *aperto* e B *aperto*.

Caso 2)

$$\begin{cases} A = \{1, 2, \dots\} \\ B = \{4, \dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \{1, 2, \dots\} \\ B = \{3, 4, \dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \{1, 2, 7, \dots\} \\ B = \{3, 4, \dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} B = \{1, 2, 7 \dots\} \\ A = \{\color{red}{3}, 4, \color{red}{5}, 6, 7, \color{red}{8}, 9\} \end{cases}$$

Caso 3)

$$\begin{cases} A = \{1, 4, \dots\} \\ B = \{2, \dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \{1, 4 \dots\} \\ B = \{\color{red}{2}, \color{red}{3}, \color{red}{5} \dots\} \end{cases}$$

Caso 4)

$$\begin{cases} A = \{1, \dots\} \\ B = \{2, 4, \dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \{1, 6, \dots\} \\ B = \{2, 4, \dots\} \end{cases} \implies \begin{cases} A = \{1, 6 \dots\} \\ B = \{\color{red}{2}, 4, \color{red}{5}, \color{red}{7} \dots\} \end{cases}$$

Problema 4

(a) Sia P un punto interno al poligono. Tra tutti i lati del poligono scegliamo quello AB tale che l'altezza PH sia minima. Dimostreremo che tale altezza PH cade all'interno del lato AB. Supponiamo per assurdo che il punto H appertenga alla retta passante per AB ma non appartenga ad AB allora sarebbe un punto esterno al poligono (perché il policono è convesso). Il segmento PH interseca il poligono in un punto K di un lato CD allora PK sarebbe minore di PH e quindi il triangolo PCD avrebbe un'altezza minore del triangolo PAB contraddicendo la nostra costruzione.
Si può dimostrare che il punto H deve essere interno ad AB perché altrimenti, se per esempio cadesse in B sempre dalla costruzione precedente si potrebbe dedurre che H è altezza anche del triangolo PBC e quindi i lati AB e BC sarebbero due lati consecutivi paralleli e questo non è consentito.

(b) La dimostrazione nel caso del poliedro è simile considerando la faccia il cui piano è a distanza minima da P.

Problema 6

(a) La dimostrazione può procedere sia utilizzando le proprietà dell'ellisse sia senza. In queste note mostreremo una soluzione che non fa uso dell'ellisse.

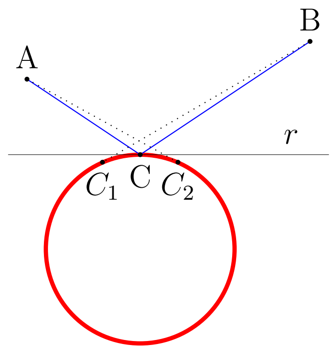
Minimizzare il perimetro del triangolo ABC vuol dire minimizzare la somma della lunghezza dei segmenti AC e BC poichè la distanza AB è fissa.

1) Con la figura 1 mostriamo che esiste un punto C sulla circonferenza la cui retta tangente forma angoli uguali con i segmenti AC e BC.

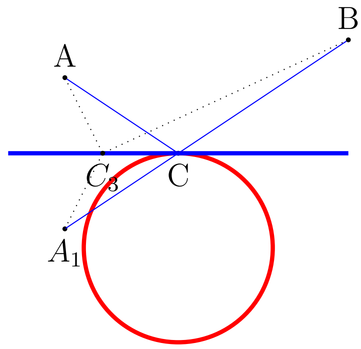
2) Con la figura 2 mostriamo che C è il punto della retta r che minimizza la somma delle distanze da A e B.

3) La figura 3 motra che i punti della circonferenza sono più lontani da A e B rispetto a quelli della retta.

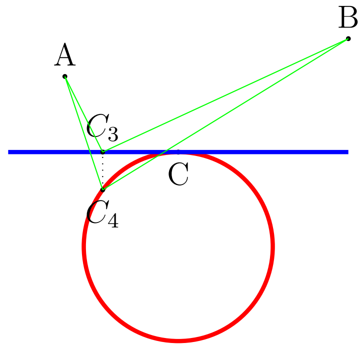
Gli angoli tra la retta tangente e i segmenti AC e BC dipendono con continuità dalla posizione di C sulla circonferenza, sia α l'angolo formato con il segmento AC e β quello con il segmento BC. Come si vede dalla figura esistono due punti C_1 e C_2 in cui si annullano rispettivamente gli angoli β e α allora la differenza $\alpha - \beta$ sarà positiva in C_1 e negativa in C_2, per continuità esiste un punto C in cui $\alpha - \beta = 0$



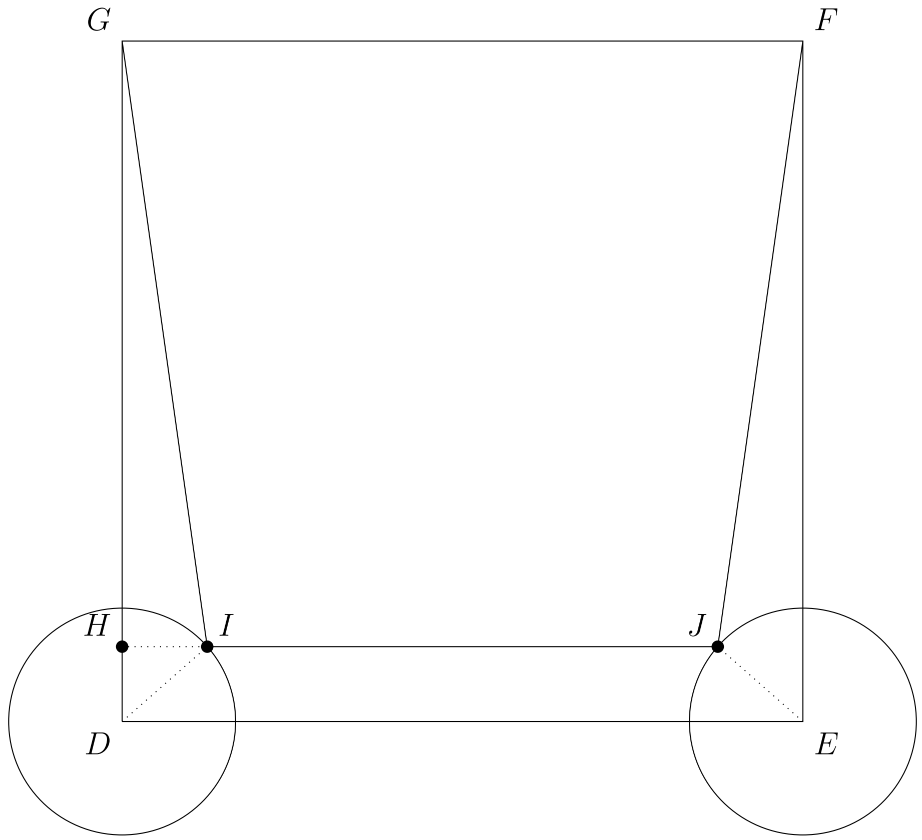
Sia A_1 il punto del piano simmetrico ad A rispetto alla retta tangente r. L'angolo che forma il segmento A_1C con la retta r è uguale ad $\alpha = \beta$ quindi i segmenti A_1C e CB sono allineati e vale $\overline{A_1C}+\overline{CB}=\overline{A_1B}$ Se C_3 è un altro punto della retta r allora $\overline{AC_3}+\overline{C_3B}=\overline{A_1C_3}+\overline{C_3B}$. Dalla disuguaglianza tringolare applicata al triangolo AC_3B si deduce $\overline{AC}+\overline{CB}<\overline{AC_3}+\overline{C_3B}$



È evidente dal disegno che $\overline{AC_3}<\overline{AC_4}$ e $\overline{C_3B}<+\overline{C_4B}$



(b)



Dal quesito (a) si deduce che vale $\widehat{DIG} = \widehat{DIJ}$ e $\widehat{EJF} = \widehat{EJI}$.
È facile rendersi conto che il segmento IJ deve essere parallelo al segmento DE. (Se per esempio la distanza del punto J dal segmento DE fosse minore di quella del punto I potremmo confrontare gli angoli dei triangoli DIG e EJF. L'angolo $\widehat{JEF}$ sarebbe maggiore dell'angolo $\widehat{JEF}$ quindi $\widehat{EJF} < \widehat{DIG}$ e $\widehat{EJI} < \widehat{DIJ}$ contraddicendo quanto dedotto dal quesito (a)).
Assumiamo per semplificare le notazioni che la lunghezza del lato del quadrato sia $l = 6$ e quindi il raggio delle circinferenze sia 1.
Sia H la proiezione del punto I su DG. Sia inoltre

$$\begin{aligned} \alpha &:= \widehat{HDI} & \beta &:= \widehat{HGI} \\ a &:= \overline{HI} = \sin(\alpha) & b &:= \overline{HD} = \cos(\alpha) \end{aligned}$$

La condizione IJ parallelo a DE ci dà $\widehat{DIJ} = \frac{\pi}{2} + \alpha$
poiché $\widehat{DIG} = \widehat{DIJ}$ allora:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$$

$$\begin{aligned} \sin(\beta) &= \cos(2\alpha) = b^2 - a^2 \\ \cos(\beta) &= \sin(2\alpha) = 2ba \end{aligned}$$

Per determinare i valori di a e b procederemo nel seguente modo: calcoleremo le lunghezze dei segmenti GH e HD in funzione di a e b e poi calcoleremo i valori di a e b utilizzando le relazioni: $a^2 + b^2 = 1$ e $\overline{GH} + \overline{HD} = 6$.

$$\overline{GH} = \overline{HI} \cdot \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{2a^2 b}{b^2 - a^2}$$

$$\overline{GH} + \overline{HD} = \frac{2a^2 b}{b^2 - a^2} + b = 6$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 - b^2 \\ \frac{2(1-b^2)b}{2b^2-1} + b = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} a^2 = 1 - b^2 \\ 12b^2 - b + 6 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Con facili calcoli si ottiene $\overline{GI} = \overline{FJ} = 2\sqrt{7}$ e $\overline{IJ} = 6 - \frac{\sqrt{7}}{2}$ Nel caso generale con quadrato di lato l

$$\boxed{\overline{GI} = \overline{FJ} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot l}$$

$$\boxed{\overline{IJ} = l \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{7}}{12}\right) \cdot l}$$