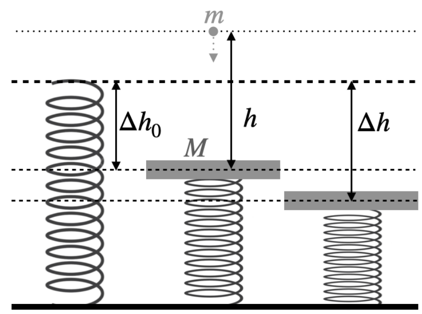
Università degli Studi di Padova, Scuola Galileiana di Studi Superiori
Classe di Scienze Naturali – **Prova scritta di Fisica** (12 Settembre 2024)

Problema 1



Una molla di massa trascurabile e costante elastica k è disposta verticalmente con l'estremo inferiore su un piano orizzontale. L'estremo superiore sostiene un piatto di massa M, che causa un abbassamento della molla rispetto alla posizione di riposo (cioè senza il piatto appoggiato sopra). Il sistema è inizialmente a riposo con il piatto sulla molla. Successivamente, un oggetto puntiforme di massa m cade sul piatto partendo in quiete da un'altezza h rispetto alla posizione di equilibrio del piatto.

- **(A)** Si calcoli in funzione dei dati del problema l'abbassamento iniziale Δh_0 del piatto rispetto alla posizione di riposo della molla, e il modulo della velocità v_0 con cui il corpo puntiforme impatta sul piatto.

Si calcoli poi l'abbassamento Δh massimo del piatto rispetto alla posizione di riposo della molla dopo che l'oggetto ha urtato il piatto stesso nei due seguenti casi:

- **(B)** urto perfettamente anelastico,
- **(C)** urto perfettamente elastico.

Problema 2

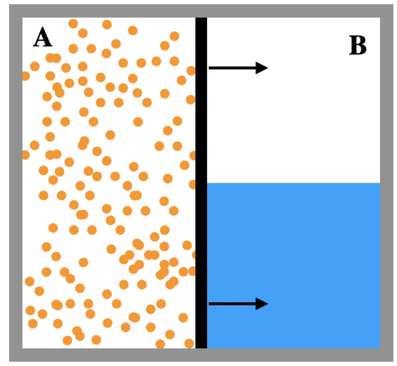
Una particella si muove in una dimensione sotto l'azione di una forza conservativa. Definito l'asse x lungo la direzione di tale moto, l'energia potenziale è descritta dalla seguente funzione:

$$U(x) = U_\mathrm{c} \cdot \left\{ \frac{1}{\left[1+(\frac{x}{a})^2\right]^2} - \frac{1}{\left[1+(\frac{x}{a})^2\right]^3} \right\} ,$$

con U_c e a parametri costanti dalle dimensioni opportune.

- **(A)** Individuare tutti i possibili valori di x in cui la particella si trova in equilibrio, e per ciascuno di essi stabilire di che tipo di equilibrio si tratta.
- **(B)** Sappiamo che la particella si trova inizialmente in $x = 0$ e che non può allontanarsi arbitrariamente lontano da tale punto. Quale è il valore massimo dell'energia cinetica della particella quando si trova nel punto $x = 0$ compatibile con questa condizione?

Problema 3



Un recipiente adiabatico di forma cubica con spigolo pari ad a è suddiviso in due parti A e B mediante un setto anch'esso adiabatico, di spessore e massa trascurabili, libero di scorrere senza attrito. Inizialmente il sistema si trova in equilibio idrostatico con il settore A contenente un gas perfetto a temperatura T_0, il settore B acqua di densità ρ che occupa metà del volume del settore (vedi figura). Al di sopra dell'acqua si assuma che ci sia il vuoto (si trascuri ovvero il vapor acqueo). Il gas in A viene successivamente riscaldato fino a quando il livello dell'acqua h_f in B, misurato rispetto al fondo del recipiente, si è alzato di un quinto rispetto al valore iniziale h_0. Si calcoli:

- **(A)** il numero di moli n del gas,
- **(B)** il volume $V_{A,f}$, la pressione finale $p_{A,f}$ e la temperatura finale T_f del gas,
- **(C)** il lavoro L compiuto dal gas.

Problema 4

Una sorgente in quiete emette onde sonore con frequenza $v_0 = 1200\,\mathrm{Hz}$ che propagano nell'aria con velocità $v_S \simeq 330\,\mathrm{m/s}$. Accanto ad essa, sempre in quiete, si trova un ricevitore. Le onde vengono emesse lungo una data direzione e vanno successivamente a incidere contro una lastra piana disposta ortogonalmente alla direzione di propagazione e in moto lungo quest'ultima. Le onde vengono riflesse dalla lastra e tornano indietro. Se il ricevitore misura una frequenza $\nu_R = 1000\,\mathrm{Hz}$, determinare se la lastra si sta avvicinando oppure allontanando dalla sorgente e con quale velocità.

Problema 5

Sei cariche puntiformi identiche sono disposte su un piano in modo tale che ciascuna di esse occupi il vertice di un esagono regolare di lato $l = 5\,\mathrm{cm}$. L'equilibrio di tale configurazione è garantito da fili molto sottili disposti lungo i lati dell'esagono e saldati alle cariche che si trovano nei vertici. Sapendo che la tensione massima che può sopportare il tipo di filo utilizzato è pari a $T_{\max} = 25\,\mathrm{N}$ determinare il valore massimo del modulo delle cariche $q_{\max}$.
[Si utilizzi il valore numerico $\epsilon_0 = 8.55 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\,m^2)}$ per la costante dielettrica del vuoto.]

Problema 6

Sulla faccia superiore di un disco di plastica di raggio R è distribuita uniformemente una carica elettrica pari a Q. Tale disco viene fatto ruotare attorno al proprio asse con velocità angolare ω e questo genera nello spazio un campo magnetico. Definito $\vec{B}_0$ come il vettore campo magnetico nel centro del disco, si identifichi la direzione di tale vettore e si fornisca l'espressione per il suo modulo B_0 in funzione dei dati simbolici del problema. Si calcoli il valore numerico di B_0 nel caso specifico $R = 1\,\mathrm{cm}$, $Q = 100\,\mu\mathrm{C}$, e $\omega = 10\,\mathrm{Hz}$.
[Si utilizzi il valore numerico $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m/A}$ per la permeabilità magnetica del vuoto.]

Soluzione Problema 1

L'**abbassamento inziale Δh_0 del piatto rispetto alla posizione di riposo della molla** si ottiene richiedendo la condizione di equilibrio per il piatto, ovvero che la forza peso sia compensata dalla reazione elastica della molla:

$$\Delta h_0 = \frac{Mg}{k} \ .$$

Il **modulo della velocità v_0 con cui il corpo puntiforme impatta sul piatto**, dalla legge di caduta libera dei gravi:

$$v_0 = \sqrt{2gh} \ .$$

L'abbassamento massimo del piatto, rispetto alla posizione di equilibrio della molla, si ricava dalla conservazione dell'energia meccanica totale del sistema, alla quale contribuisce l'energia cinetica dei corpi, l'energia potenziale immaganizzata nella molla e l'energia potenziale dei corpi sospesi.

Si consideri quindi il sistema nell'istante t_1 immediatamente successivo all'urto e nell'istante t_2 in cui l'abbassamento del piatto è massimo e si calcoli l'energia meccanica totale E_m nei due istanti. Si osservi che, nella posizione di massimo abbassamento del piatto, il sistema raggiunge il valore minimo dell'energia potenziale gravitazionale. **Si scelga quindi per comodità l'energia potenziale gravitazionale nulla a questa quota**.

Nel caso di un urto perfettamente elastico, il corpo puntifome si attacca al piatto ed il sistema formato dai due corpi procede con una velocità tale da soddisfare la conservazione della quantità di moto, ovvero rivolta verso il basso. Sia u il modulo di detta velocità, all'istante t_1 esso è pari a:

$$u = \frac{m}{m+M} v_0 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh} \ .$$

Nell'istante t_1 immediatamente successivo all'urto, l'energia cinetica è funzione della velocità appena calcolata e l'energia potenziale gravitazionale è funzione della differenza di quota $\Delta h - \Delta h_0 > 0$ rispetto alla posizione dove si è scelta nulla l'energia potenziale gravitazionale. Resta infine da considerare l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla. L'energia meccanica totale è quindi:

$$E_\mathrm{m}(t_1) = \frac{1}{2}k(\Delta h_0)^2 + \frac{1}{2}(m+M)u^2 + (m+M)g(\Delta h - \Delta h_0) \ .$$

All'istante t_2 si raggiunge il massimo abbassamento del piatto. In questa posizione il sistema si ferma ed inverte il suo moto, risulta quindi nulla l'energia cinetica, oltre che l'energia potenziale gravitazionale (si ricordi la convenzione scelta). Nell'istante t_2 l'energia meccanica totale del sistema è quindi data esclusivamente dall'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla:

$$E_\mathrm{m}(t_2) = \frac{1}{2}k(\Delta h)^2 \ .$$

Richiedendo la conservazione dell'energia $E_{\rm m}(t_1) = E_{\rm m}(t_2)$, si ottiene un'equazione di secondo grado nell'incognita Δh, la cui soluzione è (il problema richiede il valore massimo):

$$\Delta h = \frac{g(m+M)}{k} + \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{g(M+m)}}\ .$$

Nel caso di un urto elastico, l'oggetto in caduta rimbalza sul piatto e dopo l'urto i due corpi si muovono con la velocità distinte. Sia $\vec{u}$ la velocità del piatto e $\vec{v_1}$ la velocità del corpo puntiforme, dopo l'urto. Dalla conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica (urto elastico) si ottiene che $\vec{u}$ è rivolto verso il basso e $\vec{v_1}$ verso l'alto ed i relativi moduli sono pari a:

$$u = \frac{2v_0 m}{m+M} = \frac{2m}{m+M}\sqrt{2hg}\ ,$$
$$v_1 = v_0\frac{M-m}{M+m} = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{2hg}\ .$$

Come nel caso precedente sia t_1 l'istante immediatamente dopo l'urto e t_2 l'istante in cui il piatto raggiunge in massimo abbassamento, con:

$$E_{\rm m}(t_1) = \frac{1}{2}k(\Delta h_0)^2 + \frac{1}{2}Mu^2 + Mg(\Delta h - \Delta h_0)\ ,$$

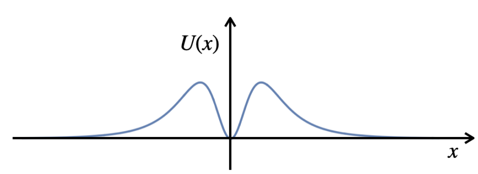
$$E_{\rm m}(t_2) = \frac{1}{2}k(\Delta h)^2\ .$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

$$\Delta h = \frac{gM}{k} + \frac{2m}{M+m}\sqrt{\frac{2Mgh}{k}}\ .$$

Soluzione Problema 2

Il grafico della funzione è rappresentato in Figura.



La condizione di equilibrio richiede che la forza, ovvero la derivata dell'energia potenziale, sia nulla. La funzione derivata è pari a:

$$U'(x) = U_{\rm c}\cdot\left\{\frac{6x}{a^2\left[1+(\frac{x}{a})^2\right]^4} - \frac{4x}{a^2\left[1+(\frac{x}{a})^2\right]^3}\right\}\ ,$$

che si annulla per:

$$x = 0 \text{ equilibrio stabile}\ ,$$
$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ equilibrio instabile}\ .$$

Il valore dell'energia cinetica richiesta è pari all'energia potenziale massima, ovvero:

$$T = U_{\max}(x) = U(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}) = \frac{4}{27}U_{\rm c}\ .$$

Soluzione Problema 3

Sia $h_0 = a/2$ il livello inziale dell'acqua. La pressione idrostatica dell'acqua ad altezza h rispetto al fondo del recipiente è data dalla legge di Stevino:

$$p_{\mathrm{H_2O}} = \rho h g(h_0 - h) \ .$$

L'acqua esercita dunque sul setto una forza perpendicolare al setto stesso, il cui modulo è pari a:

$$F = \int_0^{h_0} p_{\mathrm{H_2O}}(h') \cdot a \cdot dh' = \frac{1}{2}\rho g a {h_0}^2 \ .$$

La pressione inizale del gas in A è pertanto determinata dalla pressione esercitata dall'acqua sul setto, ovvero:

$$p_{A,0} = \frac{F}{a^2} = \frac{1}{2a}\rho g {h_0}^2 \ .$$

Il **numero n di moli del gas in** A è quindi:

$$n = \frac{p_{A,0}V_{A,0}}{RT_0} = \frac{1}{16}\frac{\rho g a^4}{RT_0} \ .$$

Il livello finale dell'acqua è $h_f = h_0(1 + 1/5) = 6h_0/5$. La **pressione finale del gas in** A si trova come nel caso precedente dalla pressione idrostatica dell'acqua sul setto, sostituendo il valore del livello inziale con quello della configurazione finale:

$$p_{A,f} = \frac{9}{50}\rho g a \ .$$

Per calcolare il volume finale del gas in A è necessario ricavare la larghezza x del setto A nello stato finale. Essendo l'acqua incomprimibile, il volume della stessa si conserva, ovvero:

$$\frac{a^3}{4} = \frac{3}{5}a^2(a - x) \ ,$$

da cui

$$x = \frac{7}{12}a \ .$$

Il **volume finale del gas in A** è quindi:

$$V_{A,f} = \frac{7}{12}a^3 \ .$$

La **temperatura finale del gas in A** è infine:

$$T_f = \frac{p_{A,f}V_{A,f}}{nR} = \frac{21}{200}\frac{\rho g a^4}{nR} \ .$$

Il **Lavoro comnpiuto dal gas in** A è positivo e deve essere pari ed opposto al lavoro della forza peso dell'acqua. Tenendo conto dello spostamento del baricentro dell'acqua, si ottiene:

$$L = \frac{\rho a^3}{4}\frac{(h_f - h_0)}{2} = \rho\frac{a^4}{80} \ .$$

Infine, si può calcolare il calore assorbito dal gas dal primo principio della Termodinamica (non era richiesto dal problema), ovvero:

$$Q = nC_V(T_f - T_0) + L \ .$$

Soluzione Problema 4

Sia $v_\star$ la velocità della sorgente definita positiva in caso di allontanamento. Come conseguenza dell'effetto Doppler la frequenza percepita da un osservatore solidale alla lastra in moto risulta

$$\nu_{\text{lastra}} = \frac{v_S - v_\star}{v_S}\nu_0 \ .$$

Quindi l'onda riflessa va pensata come un'onda emessa da una sorgente in moto con velocità $v_\star$ e frequenza ν_{lastra}. La frequenza ricevuta dal dispositivo in quiete risulta

$$\nu_R = \frac{v_S}{v_S + v_\star}\nu_{\text{lastra}} = \frac{v_S - v_\star}{v_S + v_\star}\nu_0$$

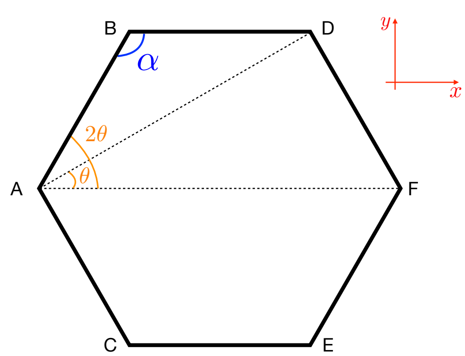
Risolvendo questa equazione otteniamo la velocità della lastra

$$v_\star = \frac{\nu_0 - \nu_R}{\nu_0 + \nu_R}v_S \ .$$

Visto che la frequenza ricevuta è inferiore di quella emessa abbiamo che $v_\star > 0$ e quindi la sorgente si allontana. Inoltre, inserendo i valori numerici troviamo

$$v_\star = \frac{200\,\text{Hz}}{2200\,\text{Hz}}\,330\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 30\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \ .$$

Soluzione Problema 5



Imponiamo la condizione di equilibrio su una qualunque delle sei cariche; una volta che questa è garantita, lo sarà anche per le altre per simmetria. Il sistema è illustrato nella figura a lato dove le sei cariche sono collocate ai vertici dell'esagono nei punti A, B, C, D, E, F. Scegliamo la carica in A. Su di essa agiscono 7 forze: le prima 5 sono dovute alla repulsione Coulombiana delle altre cariche, le rimanenti due sono dovute alle tensioni dei due fili attaccati ad essa. La condizione risulta la seguente

$$\vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_E + \vec{F}_F + \vec{T}_B + \vec{F}_C = 0 \ .$$

Dobbiamo calcolare ciascuna di queste forze e imporre che la risultante sia nulla. Per prima cosa ricordiamo che gli angoli interni di un esagono regolare sono uguali a $\alpha = 2\pi/3$, e di conseguenza avremo che $\theta = \pi/6$ (gli angoli sono illustrati in figura). Scomponiamo ciascuna forza lungo le due direzioni Cartesiane illustrate in figura. Prima di calcolare le forze è utile calcolare le lunghezze dei segmenti che uniscono la carica A con le altre

$$\begin{aligned}
AB &= AC = l \ , \\
AD &= AE = 2l\sin(\alpha/2) = \sqrt{3}l \ , \\
AF &= l + 2l\cos(2\theta) = 2l \ .
\end{aligned}$$

Detto q il modulo di ciascuna carica abbiamo che le forze di repulsione Coulombiana risultano

$$\vec{F}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l^2}\left(-\cos(2\theta), -\sin(2\theta)\right) \ ,$$
$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l^2}\left(-\cos(2\theta), +\sin(2\theta)\right) \ ,$$
$$\vec{F}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{3l^2}\left(-\cos(\theta), -\sin(\theta)\right) \ ,$$
$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{3l^2}\left(-\cos(\theta), +\sin(\theta)\right) \ ,$$
$$\vec{F}_F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4l^2}\left(-1, 0\right) \ .$$

Detto T il modulo della tensione abbiamo che esse sono dirette come segue

$$\vec{T}_B = T\left(\cos(2\theta), \sin(2\theta)\right) \ ,$$
$$\vec{T}_C = T\left(\cos(2\theta), -\sin(2\theta)\right) \ .$$

Facendo la somma delle 7 forze in gioco vediamo come le componenti lungo l'asse y si elidono. Rimangono quelle lungo l'asse x e la condizione che la risultante debba essere nulla ci fornisce la relazione

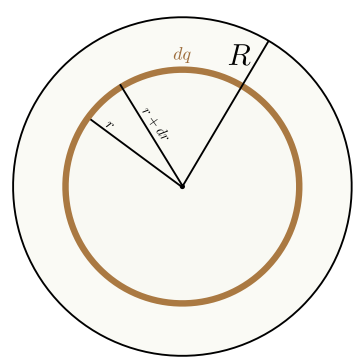
$$T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{l^2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\right) \ .$$

Il massimo valore del modulo delle cariche elettriche si ottiene imponendo che la tensione sia al valore massimo tollerabile

$$q_{\max} = l\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0\, T_{\max}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}}} \simeq 1.95 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} \ .$$

Soluzione Problema 6

Consideriamo il disco di raggio R come la combinazione di diverse corone circolari. Una di queste è illustrata nella figura a lato dove la circonferenza interna ha raggio r (con $r < R$) e raggio esterno $r + dr$. Considereremo il limite in cui $dr \ll r$ e in particolare il limite in cui tale spessore tende a zero. Per ora manteniamolo finito e calcoliamo la quantità di carica elettrica dq contenuta all'interno della corona circolare



$$dq = \frac{Q}{\pi R^2}\, 2\pi r\, dr = \frac{2Q}{R^2} r dr \ .$$

Per effetto della rotazione attorno all'asse del disco tale carica si muoverà di moto circolare uniforme attorno al centro del disco, e pertanto il suo effetto sarà lo stesso di quello di una spira di raggio r percorsa da una corrente continua. Dobbiamo calcolare l'intensità di tale corrente. In un intervallo di tempo δt una carica puntiforme posta sulla corona circolare percorre lungo la circonferenza una distanza pari a $\omega r\, \delta t$. Quindi la quantità di corrente che passa nell'unità di tempo, vale a dire l'intensità di corrente, risulta

$$di = \frac{dq}{2\pi r}\,\omega r = \frac{\omega}{2\pi} dq = \frac{\omega Q}{\pi R^2} r dr \ .$$

Ricordiamo che il campo magnetico al centro di una spira di raggio ρ percorsa da corrente continua di intensità I è diretto lungo l'asse della spira (con verso dato dalla regola del cacciavite) e ha modulo pari a $\mu_0 I/(2\rho)$. Nel nostro caso il campo magnetico $\vec{B}_0$ sarà diretto lungo l'asse del disco, e il modulo si ottiene sommando su tutti i contributi delle singole corone circolari

$$B_0 = \int dB = \int \frac{\mu_0}{2r} di = \int_0^R \frac{\mu_0}{2} \frac{\omega Q}{\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 \omega Q}{2\pi R} \ .$$

Per i valori numerici forniti in questo esercizio otteniamo

$$B_0 = \frac{4\pi \times 10^{-7} \frac{\mathrm{T\,m}}{\mathrm{A}} \ \times \ 10\,\mathrm{s}^{-1} \ \times \ 100 \times 10^{-6}\mathrm{C}}{2\pi\, 0.01\,\mathrm{m}} = 2 \times 10^{-8}\,\mathrm{T} \ .$$