SELEZIONE PER L'AMMISSIONE ALLA SCUOLA GALILEIANA
PROVA DI MATEMATICA
A.A. 2022-2023

Problema 1.
Si consideri il polinomio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Si dimostri che $f(x)^2 - f'(x)^2 \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2.
Dati tre numeri x, y, z compresi tra 0 e $\pi/2$ si consideri la disuguaglianza:

$$4\frac{\sin(x)}{\sin(y)} + 6\frac{\sin(y)}{\sin(z)} + 9\frac{\sin(z)}{\sin(x)} \geq 18.$$

(1) Dimostrare la validità della disuguaglianza.
(2) Determinare in quali casi si ha un'uguaglianza.

Problema 3.
Sia k un numero intero maggiore o uguale a 2.

(1) Siano a, b due numeri interi positivi primi fra loro e supponiamo che valga $ab = c^k$ per un intero positivo c. Dimostrare che a e b sono potenze k-esime (cioè $a = a_1^k$ e $b = b_1^k$ per opportuni interi positivi a_1 e b_1).
(2) Dimostrare che il prodotto di tre numeri interi positivi consecutivi non può essere uguale a una potenza k-esima.

Problema 4.
Due bambini possiedono n tavolette di cioccolato a quadretti, di forma quadrata, i cui lati valgono rispettivamente $1, 2, ..., n$. Vogliono dividerle in maniera equa, cioè tale che ciascuno dei due abbia lo stesso numero di quadretti di cioccolato. (Per esempio se $n = 5$ e il primo bambino prende le tavolette con 4 e 25 quadretti mentre il secondo prende le restanti tavolette con 1, 9 e 16 quadretti allora la suddivione dei quadretti sarà 29 a 26 e non è equa.) Per quali valori $n \geq 1$ esiste una suddivisione equa?

`Ciascuno dei casi da` $n = 3$ `a` $n = 10$ `vale 1/10 del punteggio mentre i restanti casi` $n > 10$ `valgono in totale 2/10 del punteggio.`

Problema 5.
Si consideri un triangolo rettangolo ABC (retto in A). Sia b la lunghezza di AB e sia c la lunghezza di AC. Dato un qualunque punto X del triangolo, chiameremo X_1 la sua proiezione sul lato AB e X_2 la sua proiezione sul lato AC. Sia Q un punto interno al triangolo ABC.

(1) Supponiamo che la lunghezza di AQ_1 sia $\frac{1}{4}b$ e che la lunghezza di AQ_2 sia $\frac{1}{3}c$. Dimostrare che il punto Q è esterno al triangolo AP_1P_2 per ogni punto P interno all'ipotenusa (ossia appartenente all'ipotenusa ma diverso da A e da B).
(2) Trovare, se esiste, un punto $\overline{Q}$ interno al triangolo ABC con le seguenti proprietà: $\overline{Q}$ appartiene al bordo del triangolo AP_1P_2 per almeno un punto P interno all'ipotenusa ma per nessun punto P interno all'ipotenusa $\overline{Q}$ sta all'interno del triangolo AP_1P_2.

Soluzioni

Problema 1

Le derivate della funzione f si possono effettuare con semplicità

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \\ f'(x) &= \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ f''(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \end{aligned}$$

Occorre mostrare che $g(x) := f(x)^2 - f'(x)^2 \geq 1$ per ogni x. Si nota subito che $g(0) = 1$ quindi per concludere basta mostrare che $x = 0$ è un minimo assoluto di g. (Può aiutare l'intuizione considerare che poiché f è una funzione pari e f' è dispari allora g è una funzione pari.) Calcoliamo quanto vale la derivata di g

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)\frac{x^6}{6!}$$

Dunque g' è un polinomio con solo termini di grado dispari a coefficienti positivi quindi:

$$g'(x) > 0 \qquad \text{per } x > 0 \qquad\qquad g'(x) < 0 \qquad \text{per } x < 0$$

Problema 2

Sia $a = \frac{\sin(x)}{\sin(y)}$, $b = \frac{\sin(y)}{\sin(z)}$, $c = \frac{\sin(z)}{\sin(x)}$ cosicché vale:

$$a \cdot b \cdot c = 1$$

e la tesi diventa:

$$4a + 6b + 9c \geq 18$$

effettuiamo un nuovo cambio di variabili con $\tilde{a} = 4a$, $\tilde{b} = 6b$ e $\tilde{c} = 9c$ cosicché l'uguaglianza diventa

$$\tilde{a} \cdot \tilde{b} \cdot \tilde{c} = 6^3$$

e la tesi diventa:

$$\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} \geq 18$$

La tesi segue dalla disguaglianza tra media geometrica e media aritmetica

$$\sqrt[3]{\tilde{a} \cdot \tilde{b} \cdot \tilde{c}} = 6 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c}}{3} \geq 6.$$

Studiamo ora quando vale l'uguaglianza.

L'uguaglianza nella disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica si verifica solo se $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ e $\tilde{c}$ sono uguali. Quindi $\tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{c} = 6$ e

$$a = \frac{3}{2} \qquad\qquad b = 1 \qquad\qquad c = \frac{2}{3}$$

quindi

$$\boxed{\sin(y) = \sin(z) = \frac{2}{3}\sin(x)}$$

le triplette (x, y, z) per le quali vale l'uguale sono date da:

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in (0, \pi/2),\ y = z = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin(x)\right) \right\}$$

Problema 3

Parte (1)

Siano $p_1, \ldots, p_h$ i primi che dividono a e $q_1, \ldots, q_l$ i primi che dividono b poiché a e b sono primi tra di loro i primi p_i e q_j sono distinti. I fattori primi che dividono a e b sono tutti e soli i fattori primi che dividono c quindi vale

$$c = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{\beta_l}$$
$$c^k = p_1^{k\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{k\alpha_h} \cdot q_1^{k\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{k\beta_l}$$

infine per l'unicità della scomposizione in fattori primi(numeri positivi) vale

$$a = p_1^{k\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{k\alpha_h} = \left(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}\right)^k$$
$$b = q_1^{k\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{k\beta_l} = \left(q_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{\beta_l}\right)^k$$

Parte (2)
Consideriamo tre numeri $n-1$, n e $n+1$ con $n \geq 2$. Supponiamo per assurdo che sia

$$(n-1)n(n+1) = d^k$$

n è primo con $(n-1)(n+1)$ allora (per la parte precedente) per qualche a e b vale

$$n = a^k \qquad (n-1)(n+1) = b^k$$

sostituiamo la prima equazione nella seconda ed effettuiamo il prodotto

$$a^{2k} - 1 = b^k$$

$\left(a^2\right)^k$ e b^k sono due potenze k-esime che differiscono di uno. Per concludere basta mostrare che due potenze k-esime non possono differire di 1. Supponiamo $a^2 = b + h$ con $h > 0$ allora $a^{2k} = (b+h)^k = b^c + kb^{k-1}h + \ldots + 1 > b^k + 1$.

Problema 4

Dimostraremo che per tutti i valori di $n \geq 7$ congrui a 3 o 4 modulo 4 esiste una suddivisione *equa*.
La somma dei primi n quadrati è data dalla formula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. I primi casi possono essere calcolati anche a mano:

1	1
4	5
9	14
16	30
25	55
36	91
49	140
64	204
81	285
100	385
121	506

Prima di tutto osserviamo che se il numero totali di quadretti di cioccolato è dispari allora la suddivisione *equa* non è possibile questo esclude i valori di n $1, 2, 5, 6, 9, 10, \ldots$ e in generale tutti i numeri n congrui a 1 o 2 modulo 4. I casi $n = 3$ e $n = 4$ non hanno soluzione perché il numero maggiore 9 (risp. 16) è superiore alla metà della somma.
Un'**osservazione** utile sulla somma dei quadrati è la seguente: se $\{a_1, \ldots, a_k\}$ e $\{b_1, \ldots, b_k\}$ sono numeri tali che:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i^2 = \sum_{i=1}^{k} b_i^2$$

allora per ogni c se $\tilde{a}_i = a_i + c$ e $\tilde{b}_i = b_i + c$ vale ancora

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{a}_i^2 = \sum_{i=1}^{k} \tilde{b}_i^2$$

questa osservazione permette (a patto che siano soddisfatte le opportune condizioni) di spostare in avanti le partizioni che funzionano.
Cominciamo dal caso $n = 7$. La somma di ciascuna partizione deve essere $\frac{140}{2} = 70$. Il 49 non può stare né con il 36 né con il 25 quindi possiamo cominciare a definire $a_1^2 = 49$, $b_1^2 = 36$ e $b_2^2 = 25$. Al gruppo delle b_i manca esattamente 9 per arrivare a 70 quindi abbiamo

$$n = 7 \ : \qquad 49 + 16 + 4 + 1 = 70 = 36 + 25 + 9$$

Consideriamo ora il caso $n = 8$. La soluzione trovata nel caso $n = 7$ più lo zero:
$a_1^2 = 49,\ a_2^2 = 16,\ a_3^2 = 4,\ a_4^2 = 1$
$b_1^2 = 36,\ b_2^2 = 25,\ b_3^2 = 9,\ b_4^2 = 0$
soddisfa le condizioni dell'**osservazione** precedente, quindi per $c = 1$ si ottiene

$$n = 8 \ : \qquad 64 + 25 + 9 + 4 = 102 = 49 + 36 + 16 + 1$$

Inoltre sempre per l'**osservazione** precedente possiamo sempre sommare 8 (se c'è una soluzione per n allora c'è anche per $n + 8$).
A questo punto se riusciamo a trovare una soluzione per $n = 11$ e $n = 12$ allora potremo concludere che la partizione esiste se e solo se vale $n \geq 7$ e n congruo a 3 o 4 modulo 4.
Affrontiamo ora il caso $n = 11$ la somma di ciascuna partizione deve essere 253.
Comiciamo dal considerare i numeri più grandi
Se 121 e 100 fossero insieme allora per arrivare ad ottenere 253 mancherebbe 32 che chiaramente non può essere ottenuto come somma di quadrati.
Quindi possiamo porre $a_1^2 = 121$ e $b_1^2 = 100$.
Se poniamo il numero 81 con le a_i allora per arrivare a 253 mancherebbe 51 che può essere ottenuto con $51 = 25 + 16 + 9 + 1$ quindi ne deduciamo la seguente suddivisione *equa*:

$$n = 11 \ : 121 + 81 + 25 + 16 + 9 + 1 = 253 = 100 + 64 + 49 + 36 + 4$$

per il caso $n = 12$ notiamo ancora che se aggiungiamo lo zero alla partizione delle b_i vale ancora l'osservazione precedente e con $c = 1$ si ottiene

$$n = 12 \ : 144 + 100 + 36 + 25 + 16 + 4 = 325 = 121 + 81 + 64 + 49 + 9 + 1$$

Problema 5

Usiamo le coordinate cartesiane, ponendo A nell'origine, il cateto AB lungo l'asse delle ascisse e il cateto AC lungo l'asse delle ordinate. Allora la retta su cui giace l'ipotenusa ha equazione

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$$

Dunque, un punto P interno all'ipotenusa ha coordinate p_1, p_2 tali che

$$\frac{p_1}{b} + \frac{p_2}{c} = 1$$

Dimostrare che Q è esterno al triangolo AP_1P_2 equivale a dimostrare che

$$\frac{\frac{b}{4}}{p_1} + \frac{\frac{c}{3}}{p_2} > 1$$

ossia che giace sopra la retta passante per P_1 e P_2.

Ora ricordiamo la seguente disuguaglianza elementare, dati due numeri reali u_1, u_2 diversi da 0:

$$(u_1^2 + u_2^2)\left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2}\right) \geq 4 \qquad (1)$$

Nel nostro caso, poniamo $u_1 = \sqrt{\frac{b}{p_1}}$, $u_2 = \sqrt{\frac{c}{p_2}}$. La disuguaglianza diventa dunque

$$\left(\frac{b}{p_1} + \frac{c}{p_2}\right)\left(\frac{1}{\frac{b}{p_1}} + \frac{1}{\frac{c}{p_2}}\right) \geq 4$$

A sinistra la somma nella seconda parentesi è uguale a 1 per quanto visto sopra, dunque abbiamo

$$\frac{b}{p_1} + \frac{c}{p_2} \geq 4$$

da cui

$$\frac{\frac{b}{4}}{p_1} + \frac{\frac{c}{4}}{p_2} \geq 1$$

per ogni scelta di P. Dunque, poiché $c > 0$ abbiamo la disuguaglianza desiderata per il punto Q:

$$\frac{\frac{b}{4}}{p_1} + \frac{\frac{c}{3}}{p_2} > \frac{\frac{b}{4}}{p_1} + \frac{\frac{c}{4}}{p_2} \geq 1$$

Per quello che riguarda la ricerca di $\overline{Q}$, le considerazioni precedenti ci suggeriscono di considerare il punto tale che $\overline{Q}_1 = \frac{b}{4}$ e $\overline{Q}_2 = \frac{c}{4}$. La disuguaglianza mostrata sopra ci indica che tale punto non sarà mai interno ai triangoli AP_1P_2 ma potrà tutt'al più appartenere alle loro ipotenuse. In particolare se si sceglie come P il punto medio dell'ipotenusa, allora il punto medio dell'ipotenusa di AP_1P_2 è proprio $\overline{Q}$. A margine, si osserva che questa è l'unica scelta di P per cui $\overline{Q}$ non è esterno ad AP_1P_2, dato che la disuguaglianza (1) che abbiamo usato è una uguaglianza se e solo se $|u_1| = |u_2|$ e dunque nel nostro caso se e solo se $\frac{b}{p_1} = \frac{c}{p_2} = 2$.