Scuola Galileiana di Studi Superiori

Seconda Prova Scritta

Area Disciplinare: Matematica

Esercizio 1 (5 punti)
Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, numero naturale, vale la seguente disuguaglianza

$$n < 2^n$$

Esercizio 2 (8 punti)
Si consideri la famiglia parametrica di funzioni reali di variabile reale

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln(x) + c & 1 < x \leq e \end{cases}$$

dove $\ln(x)$ rappresenta il logaritmo naturale di x, mentre i parametri a, b, c sono dei numeri reali (ovvero $a, b, c \in \mathbb{R}$)

1. Si dica per quale valore dei parametri questa funzione soddisfa alle **ipotesi** del Teorema di Rolle.

2. Si dica per quale valore dei parametri questa funzione soddisfa alla **tesi** del Teorema di Rolle.

Esercizio 3 (8 punti)
Si considerino le due funzioni reali di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{x}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$$

Se possibile si determini una forma esplicita per la funzione composta $f \circ g$ e, sempre se possibile, per la funzione composta $g \circ f$.

Esercizio 4 (10 punti)
Si consideri la successione di funzioni reali di variabili reali

$$f_n(x) = xe^{-nx}$$

1. Per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si individui il sottoinsieme del dominio in cui la funzione Ãš crescente.

2. Per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si individui il sottoinsieme del dominio in cui la funzione Ãš convessa.

3. Definiamo per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 1$ e per ogni numero reale $t \in]0, +\infty[$ la funzione

$$A_n(t) = \int_0^t f_n(x)dx$$

si calcoli, se esiste,

$$\lim_{t \mapsto +\infty} A_n(t)$$