AMMISSIONE ALLA CLASSE DI SCIENZE SOCIALI DELLA SCUOLA GALILEIANA
Prova di Matematica

Padova, 15 Settembre 2020

Problema 1

Si determini il numero di coppie (m, n) di numeri interi positivi minori o uguali a 1000 ($1 \leq m \leq 1000$ e $1 \leq n \leq 1000$) tali che $m^2 + n^2$ è divisibile per 49.

Le coppie (m, n) e (n, m) sono considerate uguali, pertanto vanno contate una sola volta.

Problema 2

Sia dato un triangolo T di area 1. Stabilire se esiste un parallelogramma di area strettamente più piccola di 2 che contiene T. Motivare la risposta.

Problema 3

Si determinino i coefficienti delle potenze x^{15} e x^{17} nello sviluppo di $(1 + x^3 + x^{11})^{22}$.

Problema 4

Dati due punti nel piano di coordinate $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, si chiama distanza tra A e B il numero

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Si consideri un insieme Σ di punti del piano contenente n punti, con $n > 10^{15}$. Sia Δ l'insieme delle distanze (distinte) tra gli elementi di Σ, cioè l'insieme

$$\Delta = \{d(A, B) : A, B \in \Sigma\}.$$

Denotando con $\sharp\Delta$ il numero degli elementi dell'insieme Δ, si dimostri che

$$\sharp\Delta \geq \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}}.$$
