1 Quiz matematica

Esercizio 1 Consideriamo una sfera di raggio 1 ed un ottaedro regolare inscritto nella sfera. Un punto della sfera è detto *speciale* se è equidistante ad almeno 3 vertici dell'ottaedro. Quanti sono i punti *speciali* della sfera?

(a) 11

(b) 12

(c) 13

(d) 14

Esercizio 2 Due bambini Antonio e Martino giocano con i dadi. Vince chi ottiene il punteggio più alto, in caso di parità ripetono i lanci. Antonio lancia 20 dadi a 6 facce e li somma, mentre Martino lancia 6 dadi a 20 facce e li somma. Chi ha la maggiore probabilità di vittoria? (I dadi sono tutti regolari, i dadi a 20 facce hanno 20 facce equiprobabili numerate da 1 a 20.)

(a) La probabilità che vinca Antonio è maggiore di quella di Martino.

(b) La probabilità che vinca Martino è maggiore di quella di Antonio.

(c) La probabilità che vinca Martino è uguale a quella che vinca Antonio.

(d) I dati non sono sufficienti per determinare quale probabilità sia maggiore.

Esercizio 3 Chiamiamo partizione di un intero positivo n una lista di numeri naturali positivi $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ (con $k \geq 1$) tale che $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ e

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$$

Per esempio le partizioni di 4 sono $(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)$.
Fissato n, per ogni partizione di n si calcola il prodotto $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$. Una partizione di n si dice *massimale* se tale prodotto è maggiore o uguale a quelli relativi a tutte le altre partizioni di n. Per esempio nel caso $n = 4$ le partizioni massimali sono due: (4) e $(2,2)$. Dato $n = 2022$, quante sono le sue partizioni massimali?

(a) una

(b) due

(c) cinque

(d) venti

Esercizio 4 Si considerino le seguenti affermazioni:

$A:$ per ogni $-1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1$ si ha:

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq 2\sqrt{1 - \frac{(x+y)^2}{4}}$$

$B:$ per ogni $-1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1, \ -1 \leq z \leq 1$ si ha:

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-z^2} \leq 3\sqrt{1 - \frac{(x+y+z)^2}{9}}$$

Stabilire se

(a) A vera; B vera

(b) A vera; B falsa

(c) A falsa; B vera

(d) A falsa; B falsa

Esercizio 5 In quanti modi si può scrivere il numero 13500 come differenza $a^2 - b^2$ di due numeri naturali a e b ?

(a) infiniti

(b) nessuno

(c) 8

(d) 10

Esercizio 6 Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni da $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ in sè che soddisfano la seguente proprietà: l'immagine di $f \circ f$ contiene esattamente quattro elementi. Che cardinalità ha l'insieme $\mathcal{F}$?

(a) 120

(b) 480

(c) $5^5 \cdot 4!$

(d) $2^4 \cdot 4!$

Esercizio 7 Quanti sono i numeri naturali m compresi fra 1000 e 10000 tali che m diviso per 7 dia resto 2 e diviso per 12 dia resto 7?

(a) 117

(b) 108

(c) 97

(d) 87

Esercizio 8 Si vuole costruire un parallelepipedo rettangolo a base quadrata, tale che la somma delle lunghezze dei suoi spigoli sia 120 e la superficie totale sia 504. Chiamiamo x la lunghezza del lato di base e y l'altezza del parallelepipedo. Quale delle seguenti affermazioni è vera a riguardo della coppia (x, y)?

(a) non esiste nessuna coppia ammissibile (il parallelepipedo cercato non esiste).

(b) esistono quattro coppie (x, y) che risolvono il problema dato.

(c) esiste una sola coppia (x, y) che risolve il problema dato.

(d) esistono esattamente due coppie (x, y) che risolvono il problema dato.

Esercizio 9 Sia C un punto fissato appartenente ad una circonferenza di raggio 1. Si considerino i tringoli isosceli inscritti nella circonferenza con un vertice in C e asse di simmetria passante per C, indichiamo con Γ la somma della base opposta a C e della relativa altezza.
Sia a il numero di triangoli isosceli inscritti nella circonferenza, con un vertice in C, asse di simmetria passante per C e tali che $\Gamma = \frac{3}{2}$.
Sia b il numero di triangoli isosceli inscritti nella circonferenza, con un vertice in C, asse di simmetria passante per C e tali che $\Gamma = 3$.
Sia c il numero di triangoli isosceli inscritti nella circonferenza, con un vertice in C, asse di simmetria passante per C e tali $\Gamma = (\sqrt{5} + 1)$.
Quanto vale $a + b + c$?

(a) 6

(b) 5

(c) 4

(d) nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizio 10 Un cono circoscritto ad una sfera ha la superficie laterale uguale a 41π e la superficie totale uguale a 50π. Qual è il raggio della sfera?

(a) 1.4

(b) 2.4

(c) 3.4

(d) 4.4

Soluzioni

1) (d)
2) (a)
3) (a)
4) (a)
5) (c)
6) (b)
7) (b)
8) (d)
9) (c)
10) (b)