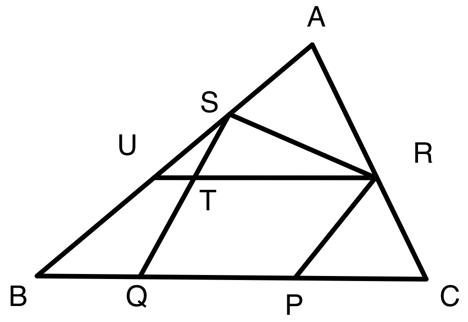
Scuola Galileiana di Studi Superiori
Classe di Scienze Naturali - A. A. 2019-2020
Prova scritta di matematica

(Selezione degli esercizi assegnati)

Esercizio 1
Consideriamo un triangolo ABC e un quadrilatero convesso $QPRS$ come in figura:



- i vertici P e Q sono all'interno del lato BC;
- R è all'interno del lato AC;
- S è all'interno del lato AB;
- la distanza di R dal lato BC è minore della distanza di S dal lato BC;
- la parallela per R al lato BC incontra SQ in T e AB in U.

Sia m il minimo fra le aree dei triangoli SPR e QPR.
a) Dimostrare che m è minore o uguale dell'area di BUR.
b) Posto $x = \frac{BU}{AB}$, dimostrare che il rapporto fra l'area di BUR e quella di ABC è $x(1-x)$.
c) Dimostrare che $4m$ è minore o uguale dell'area di ABC.

Esercizio 2.
Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali di segno costante e tale che $a_n > -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
a) Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \leq e^{\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

b) Sia $\{b_n\}$ una successione di numeri reali positivi e tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valga:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Si provi che $\{b_n\}$ è convergente ma che il suo limite non è necessariamente zero.

Esercizio 3.
a) Fra i punti del piano cartesiano a coordinate intere introduciamo la seguente curiosa regola di cancellazione e sdoppiamento. Sia $P = (a_1, a_2)$ un punto del piano cartesiano a coordinate intere. Se a_1 e a_2 sono entrambi ≥ 0 o entrambi ≤ 0, diciamo che P è *concorde* e lo lasciamo così com'è. Se invece a_1 e a_2 hanno segni discordi cancelliamo P e creiamo i nuovi punti

$Q = (a_1, a_1 + a_2)$ e $T = (a_1 + a_2, a_2)$. A ciascuno di essi applichiamo la regola: se è *concorde* lo lasciamo così com'è, altrimenti lo cancelliamo sdoppiandolo, e così via..

Dimostrare che, qualunque sia il punto iniziale P, questo algoritmo dopo un numero finito di passi si ferma e produce un insieme finito di punti che sono tutti *concordi*.

b) Studiamo adesso un caso più generale. Sia n un numero naturale ≥ 2. Diremo che una lista di numeri interi $P = (a_1, ..., a_n)$ è *concorde* se vale che $a_i \geq 0$ per ogni $i = 1, .., n$ oppure che $a_i \leq 0$ per ogni $i = 1, .., n$.

A questo punto stabiliamo la seguente regola di cancellazione e sdoppiamento. Se una lista $P = (a_1, ..., a_n)$ è concorde la lasciamo così com'è, altrimenti possiamo scegliere a nostro piacere due indici $1 \leq i < j \leq n$, dopodiché cancelliamo P e creiamo le due nuove liste $Q = (a_1, .., a_i + a_j, .., a_j, .., a_n)$ e $T = (a_1, .., a_i, .., a_j + a_i, .., a_n)$ (per chiarire, Q differisce da P solo nella sua i-esima coordinata, che è $a_i + a_j$, mentre T differisce da P solo nella sua j-esima coordinata, che è $a_j + a_i$). A ciascuna di esse applichiamo la regola: se è *concorde* la lasciamo così com'è, altrimenti scegliamo due indici, la cancelliamo sdoppiandola, e così via..

Per quali valori di $n \geq 2$ vale che, qualunque sia la lista P iniziale, è possibile fare una sequenza finita di cancellazioni e sdoppiamenti in modo tale che alla fine tutte le liste rimaste siano *concordi*?

Esercizio 4.
Dato un insieme finito di punti Γ e un punto P definiamo distanza tra l'insieme Γ e il punto P la distanza tra P e il punto più vicino di Γ ovvero:

$$d(P, \Gamma) := \min \{d(P, x) | x \in \Gamma\} \ .$$

Consideriamo ora un cubo C di lato 1, e sia Γ un insieme costituito da 9 punti: gli otto vertici del cubo più il centro del cubo. Sia infine S la superficie costituita dall'insieme dei punti interni del cubo che distano $\frac{1}{2}$ da Γ. Ovvero:

$$S := \left\{ P \in C \middle| d(P, \Gamma) = \frac{1}{2} \right\}$$

Calcolare l'area di S.
(`Può essere utile la seguente formula per il calcolo dell'area di una calotta sferica:`
$S_c = 2\pi rh$ `dove` r `è il raggio della sfera e` h `è l'altezza della calotta.`)

Esercizio 5. Sia n un intero positivo e a un intero coprimo con $2n$. Consideriamo l'insieme

$$S_a = \{ai \bmod 2n : i = 1, \dots, n\},$$

dove $k \bmod 2n$ indica il resto di k nella divisione per $2n$, preso nell'intervallo $[0, 2n - 1]$. Sia poi b un intero tale che $ab \bmod 2n = 1$ e sia $S_b = \{bj \bmod 2n : j = 1, \dots, n\}$. Sia N_a il numero di elementi di S_a compresi fra 0 e $n - 1$, e sia Σ_a la somma degli elementi di S_a. Sia N_b il numero di elementi di S_b compresi fra 0 e $n - 1$, e sia Σ_b la somma degli elementi di S_b.

1. Per prendere pratica, nel caso particolare in cui $n = 7$, $a = 3$, $b = 5$, elencare gli elementi di S_a ed S_b e calcolare Σ_a, Σ_b, N_a, N_b.

2. Nel caso generale, dimostrare che
$$\Sigma_a = \frac{3n^2 - n}{2} - nN_a.$$

3. Nel caso generale, dimostrare che $\Sigma_a = \Sigma_b$.