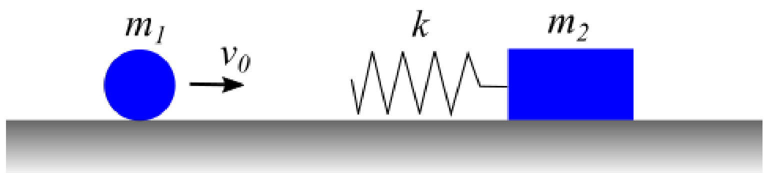
SGSS - ammissione 2019 - problemi prova di Fisica

Problema 1

Una massa m_1, con velocità iniziale v_0, urta un sistema massa-molla m_2, inizialmente in quiete ma libero di rinculare (vedere figura). La molla ha costante elastica k e massa trascurabile. Gli attriti sono trascurabili.

a) Qual è la massima compressione della molla?

b) Se, molto tempo dopo l'urto, entrambi gli oggetti si muovono nella stessa direzione, quali sono le velocità finali v_1 e v_2 associate ad m_1 ed m_2?



Soluzione 1

a) La massima compressione della molla si verifica all'istante di tempo in cui le velocità delle masse m_1 ed m_2 diventano uguali. Indicando con v la velocità comune delle due masse in questo istante, la conservazione della quantità di moto e dell'energia si scrivono

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v\,,$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}k\Delta^2\,,$$

dove Δ è la massima compressione della molla. Ricavando v dalla prima relazione e inserendolo nella seconda, otteniamo

$$\Delta = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}\, v_0\,.$$

b) Se molto tempo dopo l'urto le due masse si muovono nella stessa direzione, deve valere che $m_1 > m_2$. Inoltre la molla avrà compressione nulla. Abbiamo quindi

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2\,,$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\,,$$

da cui segue che

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_0\,, \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\,v_0\,.$$

Problema 2

Un cilindro di ferro non magnetizzato di raggio $r = 2$ mm è sospeso in posizione verticale su cuscinetti idealmente privi di attrito. Tale cilindro è contenuto in un solenoide con gli assi verticali coincidenti. Quando il solenoide è percorso da corrente, il cilindro inizia a ruotare.

a) Si dia una spiegazione di tale effetto.

b) Si calcoli il periodo di rotazione del cilindro assumendo che ogni atomo di ferro abbia momento angolare pari a $\frac{h}{2\pi}$, dove $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ J s è la costante di Planck. Si ricordi che la massa molare del ferro è $M = 55.8$ g/mole e che il momento di inerzia di un cilindro di massa m e raggio r è $I = \frac{1}{2}mr^2$.

c) Assumendo che il campo magnetico sia diretto dal basso verso l'alto, dire se il cilindro, visto dall'alto, ruota in senso orario o antiorario.

Soluzione 2

a) In assenza di campo magnetico, gli atomi di ferro sono orientati in modo casuale. Quando il solenoide è percorso da corrente, questi si orientano in maniera tale che il loro momento di dipolo magnetico sia allineato (con stesso verso) al campo magnetico. Poichè ogni atomo di ferro ha momento angolare di ugual direzione e verso opposto al momento di dipolo magnetico, abbiamo un momento angolare atomico totale diverso da zero. Per la conservazione del momento angolare, questo deve essere compensato da una rotazione del cilindro. Questo fenomeno è noto come effetto Einstein–De Haas.

b) Il momento angolare atomico totale è dato da

$$L_{\mathrm{at}} = n\, N_A \frac{h}{2\pi} ,$$

dove n è il numero di moli di atomi di ferro nel cilindro e N_A è il numero di Avogadro. Possiamo esprimere

$$n = \frac{m}{M} ,$$

dove m è la massa del cilindro e M la massa molare del ferro. Inoltre, abbiamo che il momento angolare di rotazione del cilindro è

$$L_{\mathrm{cil}} = \frac{1}{2}mr^2\omega = \frac{\pi m r^2}{T} ,$$

dove ω è la velocità angolare mentre T è il periodo di rotazione del cilindro. Uguagliando L_{at} e L_{cil}, deduciamo che il periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi^2 r^2 M}{h\, N_A} .$$

Inserendo i dati numerici, arriviamo a

$$T \simeq 1.1 \cdot 10^4 \, \mathrm{s} \simeq 3 \text{ ore}\,.$$

c) Il momento di dipolo magnetico ha stessa direzione e stesso verso del campo magnetico. Essendo l'elettrone responsabile del momento di dipolo e avendo carica negativa, il momento angolare atomico ha la stessa direzione ma verso opposto rispetto al campo magnetico. Ne segue che il momento angolare del cilindro ha stessa direzione e stesso verso del campo magnetico. Per cui il verso di rotazione è antiorario.

Problema 3

Utilizzando la meccanica quantistica, si dimostra che un oscillatore armonico di frequenza ν possiede dei livelli di energia discreti E_n dati da

$$E_n = (n + 1/2)\, h\,\nu\,,$$

dove $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ è un intero e h è la costante di Planck. Consideriamo N oscillatori identici di frequenza ν, in equilibrio termico alla temperatura T. La ripartizione tra i diversi livelli di energia avviene seguendo la legge di distribuzione di Boltzmann, secondo la quale il numero P_n di oscillatori di energia E_n è dato da

$$P_n = A\, \mathrm{e}^{-E_n/(kT)}\,,$$

dove A è un fattore costante e $k = R/N_A$ è la costante di Boltzmann, data dal rapporto tra la costante dei gas R e il numero di Avogadro N_A.

a) Determinare A in funzione di N e di $x = h\,\nu/(kT)$. Sarà utile ricordare che la somma della serie geometrica è $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$.

b) Calcolare l'energia totale $W = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\, E_n$. Ricavare l'energia media di un oscillatore $w = W/N$ e discuterne il limite per $h\,\nu \ll k\,T$.

c) Un modello di solido proposto da Einstein descrive una mole di cristallo come $N = 3\,N_A$ oscillatori del tipo discusso sopra. Determinare l'energia interna U e il calore specifico molare a volume costante c_V. Rappresentare qualitativamente in un grafico l'andamento di U e di c_V in funzione di T. Quali sono i limiti di alta e di bassa temperatura di c_V?

Soluzione 3

a) Il numero totale di oscillatori è dato da

$$N \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P_n \;=\; A\,\mathrm{e}^{-x/2} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx} \;=\; A\,\frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{A}{2\sinh(x/2)}\,,$$

dove abbiamo risommato la serie geometrica. Ne segue che il fattore di normalizzazione A è dato da

$$A = 2N\sinh(x/2)\,.$$

b) L'energia totale si scrive

$$W \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n \;=\; -h\,\nu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \frac{A\,h\,\nu\,\cosh(x/2)}{4\,\sinh^2(x/2)} \;=\; \frac{N\,h\,\nu}{2}\coth(h\nu/2kT)\,.$$

Ne segue che l'energia media per oscillatore è

$$w = \frac{W}{N} = \frac{h\nu}{2}\coth(h\nu/2kT)\,.$$

Il limite $h\nu \ll kT$ corrisponde a $x \ll 1$. Scrivendo $h\nu = xkT$ e valutando il limite dell'energia media per x piccolo, troviamo

$$\lim_{x\to 0} w = kT\,.$$

Questo limite ci dice che quando gli effetti quantistici sono trascurabili (h molto più piccolo delle altre grandezze in gioco), recuperiamo il risultato classico di equipartizione dell'energia per un oscillatore armonico. In particolare, l'energia media diventa indipendente dalla frequenza dell'oscillatore.

c) L'energia interna di $N = 3N_A$ oscillatori del tipo discusso sopra è data da

$$U = N\,w = \frac{3}{2}N_A h\nu\coth(h\nu/2kT)\,.$$

Ne segue che il calore specifico molare a volume costante è

$$c_V = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = 3kN_A\left(\frac{h\nu}{2kT}\right)^2\frac{1}{\sinh^2(h\nu/2kT)}\,.$$

Ad alta temperatura,

$$\lim_{T\to\infty} c_V = 3kN_A = 3R\,,$$

che è in accordo con il risultato classico, per cui $c_V = 3R$ indipendentemente da T (legge di Dulong e Petit). A bassa temperatura abbiamo

$$\lim_{T\to 0} c_V = 0\,.$$

Questa predizione, che è una diretta conseguenza della quantizzazione dell'energia, si discosta dall'analisi classica ed è in buon accordo con gli esperimenti.

Problema 4

Un nucleo di Nickel ^{60}Ni, a riposo nel sistema del laboratorio ma libero di muoversi, si trova in un ipotetico stato eccitato di energia E_1. Esso si diseccita nello stato fondamentale di energia $E_0 = 0$ emettendo un raggio γ di energia $E_\gamma = 3 \cdot 10^6$ eV e quantità di moto $p_\gamma = E_\gamma/c$, dove c è la velocità della luce. Si assuma che la massa di un nucleo di ^{60}Ni sia esattamente pari a $m = 6 \cdot 10^{10}$ eV$/c^2$. Si ricordi che l'elettronvolt eV è un'unità di misura dell'energia, data da 1 eV $= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J.

a) Qual è il valore dell'energia E_1? Dare il risultato con la precisione dell'eV.

b) Quale sarebbe l'energia E_2 di un ipotetico stato eccitato del ^{60}Ni, inizialmente nello stato fondamentale $E_0 = 0$, in grado di assorbire un raggio γ di energia $E_\gamma = 3 \cdot 10^6$ eV? Di nuovo, dare il risultato con la precisione dell'eV.

c) In che configurazione dovrebbero trovarsi i nuclei di ^{60}Ni affinché il raggio γ di energia $E_\gamma = 3 \cdot 10^6$ eV possa essere sia emesso che assorbito dal medesimo stato di due diversi nuclei?

Soluzione 4

a) Abbiamo che

$$E_1 = E_\gamma + E_{\mathrm{Ni}}$$

dove $E_{\mathrm{Ni}} = \frac{p_{\mathrm{Ni}}^2}{2m}$ è l'energia di rinculo del nucleo di Nickel con momento p_{Ni}. Per la conservazione della quantità di moto,

$$p_{\mathrm{Ni}} = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}\,.$$

Usando anche la conservazione dell'energia, segue che

$$E_1 = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} = (3 \cdot 10^6 + 75)\ \mathrm{eV}\,.$$

b) In questo caso abbiamo

$$E_2 + E_{\mathrm{Ni}} = E_\gamma\,,$$

quindi

$$E_2 = E_\gamma - \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} = (3 \cdot 10^6 - 75)\ \mathrm{eV}\,.$$

c) Occorre che $E_1 = E_2$, ovvero che E_{Ni} sia prossima a zero. Questo si verifica se gli atomi di Nickel sono vincolati in una struttura cristallina, per cui a rinculare è tutto il cristallo, che ha quindi massa enormemente superiore rispetto a quella dell'atomo (effetto Mössbauer).

Problema 5

Due conduttori sferici, di raggio rispettivamente r_1 e r_2, con $r_2 < r_1$, sono posti a grande distanza tra loro e collegati da un filo conduttore di capacità trascurabile. I conduttori sono immersi in un'atmosfera gassosa in cui campi elettrici maggiori di un valore soglia E_0 provocano scariche elettriche. Ricordando che la capacità C di un conduttore sferico di raggio r è $C = 4\pi\epsilon_0 r$,

a) determinare il valore minimo della carica totale Q da assegnare al sistema dei due conduttori affinché si verifichino scariche elettriche nell'atmosfera gassosa;

b) identificare la regione dello spazio in cui si verificano le scariche.

Soluzione 5

a) Essendo collegate tramite il filo conduttore, le due sfere si trovano allo stesso potenziale V. Ricordando che il filo ha capacità trascurabile, la carica totale sarà data da

$$Q = (C_1 + C_2)V \,, \tag{1}$$

dove C_1 e C_2 sono le capacità della sfera di raggio r_1 e r_2, rispettivamente. La carica su ciascuna delle due sfere è quindi

$$Q_1 = C_1\, V = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q = \frac{r_1}{r_1 + r_2} Q \,, \qquad Q_2 = C_2\, V = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q = \frac{r_2}{r_1 + r_2} Q \,, \tag{2}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la relazione tra capacità e raggio di un conduttore sferico data nel testo del problema. Ricordando che la densità di carica sulla sfera è $\sigma = Q/(4\pi r^2)$, abbiamo che il campo elettrico sulla sfera 1 è

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (r_1 + r_2) r_1} \tag{3}$$

e analogamente per la sfera 2. Poichè $r_2 < r_1$, abbiamo che $E_2 > E_1$. La condizione minima affinchè si verifichino scariche elettriche è quindi $E_2 > E_0$, ovvero

$$Q > 4\pi\epsilon_0 (r_1 + r_2) r_2 E_0 = r_2 (C_1 + C_2) E_0 \,. \tag{4}$$

b) Le scariche avvengono in prossimità della sfera più piccola.

Problema 6

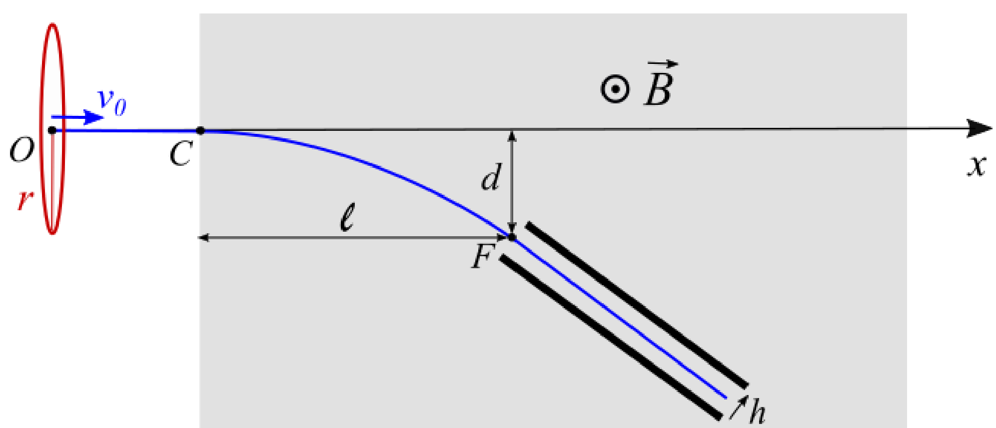
Un anello circolare di raggio $r = 10$ cm e spessore trascurabile possiede una carica positiva Q distribuita uniformemente lungo di esso; l'anello è contenuto in un piano ortogonale all'asse x ed è centrato nel punto O, come in figura. Un protone viene immesso nel punto O con velocità iniziale $v_0 = 5 \cdot 10^5$ m/s diretta lungo l'asse x. Dopo aver subìto l'accelerazione dovuta al campo elettrico dell'anello nel tratto $OC = \sqrt{2}\,r$, il protone entra in una regione opportunamente schermata (in maniera che il campo elettrico dell'anello possa essere ignorato da qui in poi), sede di un campo magnetico $\vec{B}$ normale al foglio e diretto verso il lettore. Nel punto F distante $\ell = 30$ cm e $d = 10$ cm da C, il protone entra tra due piani conduttori distanti $h = 1$ cm e mantenuti ad una differenza di potenziale $\Delta V = 200\,\mathrm{V}$. La traiettoria del protone in questa zona, in cui è tuttora presente il campo magnetico, risulta rettilinea.

a) Analizzando il moto tra O e C, esprimere la carica Q dell'anello in funzione della velocità v del protone nel punto C e degli altri dati del problema.

b) Studiando la traiettoria tra C ed F, determinare il rapporto v/B.

c) Esaminando il moto tra i due piani conduttori, trovare il prodotto vB.

d) Combinando le informazioni ottenute, determinare v, B e Q. Si assuma che il protone abbia un rapporto carica/massa pari a $q/m = 10^8$ C/Kg. Per la costante dielettrica del vuoto si usi $\epsilon_0 \simeq 9 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{C}^2/(\mathrm{N\,m}^2)$.



Soluzione 6

a) Per ragioni di simmetria, il potenziale lungo l'asse dell'anello è lo stesso di quello di una carica puntiforme Q posta a distanza $\sqrt{x^2 + r^2}$, dove x è la distanza del protone dal punto O. Quindi il potenziale percepito dal protone nel tratto tra O e C è

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + r^2}} .$$

La variazione di energia cinetica nel tratto da O a C è $\Delta E_c = -q(V(C) - V(O))$, per cui

$$\frac{1}{2} m \left(v^2 - v_0^2\right) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (OC)^2}} \right) .$$

Da qui otteniamo

$$Q = 2\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \frac{m}{q} \left(v^2 - v_0^2\right) r .$$

b) Nel tratto di traiettoria che va da C a F il protone risente del solo campo magnetico $\vec{B}$; percorre quindi un arco di circonferenza. Il valore del raggio R della circonferenza può essere ottenuto dai dati del problema notando che

$$R^2 = (R - d)^2 + \ell^2 ,$$

che dà

$$R = \frac{d^2 + \ell^2}{2d} = 50 \text{ cm} .$$

Uguagliando la forza di Lorentz qvB e la forza centripeta mv^2/R, otteniamo inoltre la relazione

$$\frac{v}{B} = \frac{q}{m} R .$$

c) Nella regione tra i due piani conduttori la traiettoria è rettilinea e quindi la forza di Lorentz $\vec{F}_L = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ non ha componenti trasversali. Poiché sia $\vec{E}$ che $\vec{v} \times \vec{B}$ sono ortogonali alla traiettoria, necessariamente $\vec{F}_L = 0$. Ciò implica

$$E = vB .$$

Ricordando che $E = \Delta V/h$, arriviamo a

$$vB = \frac{\Delta V}{h} .$$

d) Dalle relazioni ottenute sopra, otteniamo

$$v \;=\; \sqrt{\frac{\Delta V}{h} \frac{q}{m} R} \;=\; 10^6 \text{ m/s} ,$$

$$B \;=\; \sqrt{\frac{\Delta V}{hR} \frac{m}{q}} \;=\; 2 \cdot 10^{-2} \text{ T} .$$

Infine si ottiene il valore numerico di Q,

$$Q = 2\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \frac{m}{q} \left(v^2 - v_0^2\right) r \;\simeq\; 10^{-7} \text{ C} .$$