SELEZIONE PER L'AMMISSIONE ALLA SCUOLA GALILEIANA
PROVA DI MATEMATICA
A.A. 2021-2022

Problema 1. Si consideri il piano cartesiano con coordinate (x, y). Sono presenti due muri: il primo è fisso e coincide con la retta $x = 0$; il secondo muro, che al tempo $t = 0$ coincide con la retta $x = 1$, si muove con velocità $(-1, 0)$ (cioè si muove "verso sinistra" con velocità 1). Al tempo $t = 0$ vi è poi una pallina puntiforme che parte dall'origine $(0, 0)$ e si muove con velocità $(2, 2)$. Ogni volta che la pallina incontra un muro rimbalza su di esso e la sua velocità si modifica: se essa era (v_1, v_2), il rimbalzo la muta in $(-v_1, v_2)$.

In quale punto del piano cartesiano avviene il 2021-esimo rimbalzo tra la pallina e il muro mobile? E a quale tempo avviene tale rimbalzo?

(Attenzione: vi sono ovviamente anche svariati rimbalzi della pallina sul muro fisso, ma essi non entrano nel computo dei 2021 considerati nel problema)

Problema 2. Premettiamo una definizione: dato un insieme X e una funzione $f : X \to X$, diciamo che f ammette una radice quadrata per composizione se esiste una funzione $g : X \to X$ tale che $f = g \circ g$.

(1) Sia $X = \{0, 1, 2, 3, ..., 30\}$. Consideriamo la funzione $f : X \to X$ definita così: per ogni $x \in X$, $f(x)$ è uguale al resto di $2x$ nella divisione per 31. Per esempio $f(0) = 0, f(10) = 20, f(18) = 5, f(30) = 29$. Dimostrare che f è biettiva.

(2) Dati f, X come nel punto (1), per ogni elemento $a \in X$ chiameremo *orbita* di a l'insieme
$$\{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), ...\}$$
Descrivere l'orbita di 1 e l'orbita di 3. Dimostrare che è possibile scrivere X come unione disgiunta di orbite.

(3) Dire se la funzione f del punto (1) ammette una radice quadrata per composizione.

(4) Stesse domanda del punto (3) quando $X = \{0, 1, 2, 3, ..., 62\}$ e la funzione f è definita dalla richiesta che $f(x)$ sia uguale al resto di $2x$ nella divisione per 63.

(5) Sia ora $X = [-1, 1]$. Consideriamo la funzione $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ data da $f(x) = -x$. Dire se esiste una radice quadrata per composizione continua, ossia una funzione continua $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ tale che $f = g \circ g$.

Problema 3. Per $n \geq 1$ sia $d(n)$ il numero di divisori positivi di n. (Per esempio $d(4) = 3$, $d(24) = 8$). Consideriamo per ogni $n \geq 1$ il numero
$$a_n := \max \{d(1), d(2), \dots, d(n)\}.$$

(1) Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

(2) Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln(n)}.$$

Problema 4. Sia n un intero ≥ 2 e siano $a_1, ..., a_n$ dei numeri interi a due a due distinti. Sia $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti interi nella variabile x.

(1) Dimostrare che se un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$ ha $a_1, ..., a_n$ come radici allora o ha grado maggiore o uguale a n o è il polinomio costante 0.

(2) Consideriamo il polinomio in $\mathbb{Z}[x]$

$$P(x) = 1 + (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

Dimostrare che se $n > 4$ non è possibile scrivere $P(x) = Q(x)T(x)$ con $Q(x)$, $T(x)$ polinomi in $\mathbb{Z}[x]$ di grado maggiore o uguale a 1 (non necessariamente distinti).

(3) Con $P(x)$ come sopra, studiare i casi $n = 2, 4$. Mostrare che per certe scelte dei numeri $a_1, ..., a_n$ è possibile scrivere $P(x) = Q(x)^2$ con $Q(x)$ polinomio in $\mathbb{Z}[x]$.

Problema 5. Ricordiamo che un *tetraedro regolare* è un poliedro con 4 facce, le cui facce sono triangoli equilateri. Consideriamo un tetraedro regolare T di spigolo 1. Data una coppia di facce del tetraedro consideriamo i due piani passanti per i vertici comuni alle facce e ortogonali a entrambe le facce. Ripetendo questo procedimento per tutte le coppie di facce otteniamo una famiglia di 12 piani che delimitano un poliedro S. Qui "delimitano" vuol dire che S contiene il centro del tetraedro, le facce di S sono contenute nei 12 piani, mentre i punti interni ad S non appartengono ai piani.

(1) Descrivere la forma di S (numero e forma delle sue facce).

(2) Calcolare la superficie di S.

(3) Calcolare il volume di S.

Soluzioni

Problema 1.
Per ogni $i \geq 1$ intero chiamiamo t_i l'istante in cui avviene l'i-esimo rimbalzo tra pallina e muro mobile. Calcoliamo t_1. Nell'intervallo temporale $[0, t_1]$ pallina e muro mobile si avvicinano a velocità relativa 3, perciò $t_1 = \frac{1}{3}$; inoltre, il primo rimbalzo avviene in un punto di ascissa $x_1 = \frac{2}{3}$.

Supponiamo di conoscere l'istante temporale t_i dell'i-esimo rimbalzo nonché l'ascissa x_i del punto in cui avviene tale rimbalzo e usiamoli per calcolare l'istante t_{i+1} e l'ascissa x_{i+1} associati al successivo rimbalzo $(i+1)$-esimo. Nel tempo che intercorre tra tali rimbalzi la proiezione sull'asse delle ascisse della pallina percorre una distanza $x_i + x_{i+1}$ a velocità 2, mentre il muro percorre una distanza $x_i - x_{i+1}$ a velocità 1. Ne deduciamo che

$$\frac{x_i + x_{i+1}}{2} = t_{i+1} - t_i = x_i - x_{i+1}$$

da cui $x_{i+1} = x_i/3$; dato che $x_1 = 2/3$, deduciamo che $x_i = 2/3^i$.

Dato che al tempo t_i il muro mobile si trova in posizione x_i, la legge di moto del muro stesso implica evidentemente che $x_i = 1 - t_i$.

Il 2021-esimo rimbalzo avviene dunque in un punto di ascissa $x_{2021} = 2/3^{2021}$ al tempo $t_{2021} = 1 - \frac{2}{3^{2021}}$. Infine, il punto di 2021-esimo rimbalzo ha ordinata $2t_{2021} = 2 - \frac{4}{3^{2021}}$, dove si è sfruttato il fatto che l'ordinata della posizione della pallina si muove con velocità costante 2.

Problema 2.
Le domande (1) e (2) sono abbastanza standard. Un modo per affrontare il punto (3) potrebbe essere considerare le orbite richieste nel punto precedente

$$\{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$\{3, 6, 12, 24, 17\}$$

Questo può suggerire l'idea di cominciare a costruire una funzione $g : X \to X$ tale che

$$g(1) = 3, g(3) = 2, g(2) = 6, g(6) = 4, g(4) = 12, g(12) = 8$$

$$g(8) = 24, g(24) = 16, g(16) = 17, g(17) = 1$$

Si nota che l'insieme X viene partizionato dall'orbita $\{0\}$ e da 6 orbite di cardinalità 5 e ponendo $g(0) = 0$ e considerando a due a due le 6 orbite si costruisce una funzione g che è radice quadrata. Si noti che in questo modo si costruiscono molte radici quadrate. Una fra queste è la funzione che associa ad ogni x il resto di $8x$ nella divisione per 31.

Per la quarta domanda una analisi della partizione in orbite di X rivela che ci sono 9 orbite di cardinalità 6, 2 orbite di cardinalità 3, un'orbita di cardinalità 2 e l'orbita $\{0\}$. Si osserva che se esistesse una radice quadrata g, la funzione g sarebbe bigettiva e fornirebbe dunque anch'essa una partizione in orbite di X. Si nota poi che un'orbita di g, se ha cardinalità dispari è anche un'orbita di $g \circ g$, se invece ha cardinalità pari si "spezza" in due orbite di $g \circ g$ di cardinalità uguale alla metà della cardinalità iniziale. Dunque non è possibile ottenere nella partizione di X in orbite di $f = g \circ g$ una sola orbita di cardinalità 2, e neppure un numero dispari di orbite di cardinalità 6.

Per la quinta domanda, si osserva come sopra che siccome $g \circ g = f$ è bigettiva, allora anche g deve essere bigettiva. Ora una funzione bigettiva e continua da un intervallo di $\mathbb{R}$ in sé è monotona. La composizione di una funzione monotona g con se stessa è crescente (indipendentemente dal 'verso' di monotonia di g), ma questo dà un assurdo perché $g \circ g = f$ è decrescente. L'assurdo si può trovare anche in modo più dettagliato: supponiamo $g(x)$ crescente, per esempio. Allora $g(x) < g(1)$ per $x < 1$, e quindi (siccome g è surgettiva) $g(1) = 1$, assurdo perché $g(g(1)) = -1$. Si ragiona similmente se g è decrescente.

Problema 3

Vale $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ln(n)} = +\infty$
Vediamo la dimostrazione.
(a) METODO 1
Se x divide n allora anche $\frac{n}{x}$ divide n. Ad ogni divisore x compreso tra 1 e $\sqrt{n}$ ne corrisponde uno in $[\sqrt{n}, n]$ e viceversa. I divisore di n tra 1 e $\sqrt{n}$ sono al più $\sqrt{n}$ dunque

$$d_n \leq 2\sqrt{n}$$

segue facilmente

$$0 < \frac{a_n}{n} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

(a) METODO 2
Se $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_h^{k_h}$ con $p_.$ numero primo e $k_. > 0$ allora vale $d_n = (k_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_h + 1)$ dunque:

$$\frac{d_n}{n} = \frac{k_1 + 1}{p_1^{k_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{k_h + 1}{p_h^{k_h}}$$

Osserviamo che i fattori del precedente prodotto sono tutti minori o uguali ad 1 e decrescenti in k_j e p_j.
Se n è grande, $n > (m!)^m$ allora o un p_j è maggiore di m oppure un k_j è maggiore di m.

$$p_j > m \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{k_j + 1}{p_j^{k_j}} < \frac{2}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n}{n} < \frac{2}{m}$$

$$k_j > m \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{k_j + 1}{p_j^{k_j}} < \frac{m+1}{2^m} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n}{n} < \frac{m+1}{2^m}$$

applicando la definizione di limite segue $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.
(b) Se $n = 6^k$ allora $d_n = (k+1)^2$ quindi

$$n = 6^k \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d_n}{\ln(n)} = \frac{(k+1)^2}{\ln(n)} = \frac{(\ln_6(n) + 1)^2}{\ln(n)}$$

in generale per n grande

$$\frac{a_n}{\ln(n)} > \frac{(\ln_6(n))^2}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln^2(6)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Problema 4

La prima parte è una applicazione per induzione del teorema di Ruffini.

Per la seconda parte, supponiamo che esistano P e T come richiesto. Vale dunque $P = QT$ e, dato che il coefficiente direttore di P è 1, si può suppore che Q e T abbiano a loro volta coefficiente direttore 1. Inoltre la richiesta che Q e T abbiano grado ≥ 1 implica anche che hanno grado $\leq n-1$.

Osserviamo che vale, per ogni $k = 1, ..., n$,

$$1 = P(a_k) = Q(a_k)(T(a_k)$$

Da questo si ricava che vale $Q(a_k) = T(a_k) = 1$ oppure $Q(a_k) = (T(a_k) = -1$. In ogni caso, per ogni $k = 1, ..., n$, vale $Q(a_k) = T(a_k)$; dunque il polinomio $Q - T$ ha n radici distinte (i numeri $a_1, ..., a_n$) e ha grado $< n$ (perché è differenza di due polinomi di grado $< n$). Per la prima parte dell'esercizio, si ricava che $Q - T$ è il polinomio 0. Dunque $Q = T$ e abbiamo

$$P = Q^2$$

Questo, se n è dispari dà un assurdo, e dunque non esistono Q e T come richiesto. Supponiamo allora n pari, e scriviamo $n = 2m$. Dalla relazione $P = Q^2$ si ricava

$$1 + (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = Q^2$$

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = Q^2 - 1 = (Q - 1)(Q + 1)$$

Visto che $Q-1$ e $Q+1$ sono due polinomi di grado m, deve valere, a meno di rinumerare $a_1, ..., a_n$, che

$$Q - 1 = \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)$$

$$Q + 1 = \prod_{i=m+1}^{2m} (x - a_i)$$

Si consideri adesso il massimo fra gli interi $a_1, ..., a_n$. Supponiamo che appartenga all'insieme $\{a_1, ..., a_m\}$ e per esempio supponiamo, a meno di riordinarli, che sia a_m. Valutando in a_m la prima uguaglianza abbiamo

$$Q(a_m) - 1 = \prod_{i=1}^{m} (a_m - a_i) = 0$$

ossia $Q(a_m) = 1$. Valutando in a_m la seconda uguaglianza abbiamo

$$Q(a_m) + 1 = \prod_{i=m+1}^{2m} (a_m - a_i)$$

da cui

$$2 = \prod_{i=m+1}^{2m} (a_m - a_i)$$

Se $m \geq 3$ abbiamo un assurdo: infatti nel membro di destra ci sono almeno 3 fattori interi positivi distinti, e non si può scrivere 2 come prodotto di tre o più fattori interi positivi distinti. In modo del tutto analogo si sarebbe trovato un assurdo se il massimo fra gli interi $a_1, ..., a_n$ fosse appartenuto all'insieme $\{a_{m+1}, ..., a_n\}$. Dunque anche per n pari ≥ 6 non esistono i polinomi P e T cercati. Restano da considerare i casi $n = 2$ e $n = 4$ come richiesto dal punto (3).

Per $n = 2$ poniamo $a_1 = 2, a_2 = 0$. Calcoliamo $P(x) = (x - 2)x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

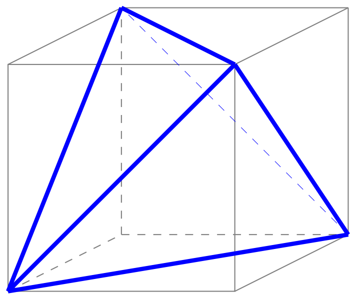
Per $n = 4$ le relazioni tipo le seguenti, che abbiamo trovato precedentemente

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_4) = Q^2 - 1 = (Q - 1)(Q + 1)$$

$$(x - a_1)(x - a_2) = Q - 1$$
$$(x - a_3)(x - a_4) = Q + 1$$
$$2 = \prod_{i=3}^{4} (a_m - a_i)$$

ci suggeriscono che i valori a_1, a_2, a_3, a_4 devono essere molto vicini fra loro, ed è facile verificare che, a meno di permutazioni, devono essere quattro numeri consecutivi. Poniamo per esempio $a_1 = 3, a_2 = 0, a_3 = 2, a_4 = 1$. Calcolando otteniamo $Q(x) - 1 = (x - 3)x$, ossia $Q(x) = x^2 - 3x + 1$. Infatti si verifica che $P(x) = (x-3)x(x-2)(x-1)+1 = (x^2-3x+1)^2$.

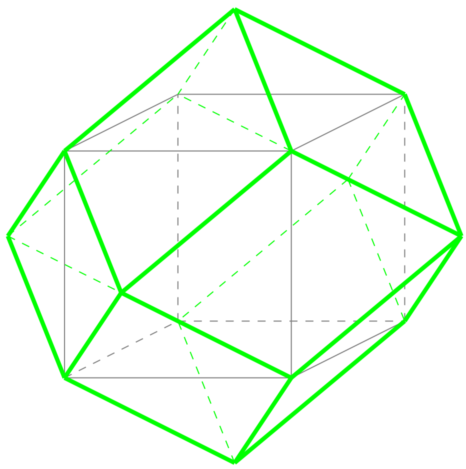
Problema 5



Un tetraedro può essere immerso in un cubo prendendo come vertici del tetraedro quattro vertici non adiacenti del cubo, vedi figura. Il lato del cubo sarà $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ciascuno dei 12 piani descritti dal testo passa per uno dei dodici spigoli del cubo e forma con le facce adiacenti (del cubo) angoli di 45°.

Il solido S che si ottiene è dato dal cubo centrale più sei piramidi appoggiate alle facce del cubo con altezza metà del lato del quadrato. Vedi seconda figura.



Il solido S ha 14 vertici e dodici facce uguali con forma di rombo diagonale minore uguale al lato del cubo l mentre la diagonale maggiore è uguale a $\sqrt{2}\ l = 1$.

La superfice è data da:
$12 \cdot l \cdot \sqrt{2}\ l/2 = 3\sqrt{2}$

Il volume è dato da $2l^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$