

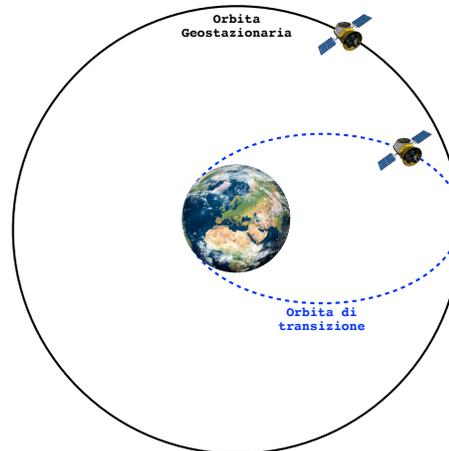
### Problema 1

Una fune inestensibile e di massa trascurabile è appesa al soffitto a un estremo e ha saldato un anello, anch'esso di massa trascurabile, all'altro estremo. Attraverso tale anello passa una seconda fune, sempre inestensibile e di massa trascurabile, ai cui estremi sono attaccati un pallone da calcio (di forma perfettamente sferica) e un borsone sportivo. Il sistema è in equilibrio statico nella configurazione illustrata in figura dove il pallone si trova più in alto del borsone. In tale configurazione, un tratto della seconda fune (disegnata in rosso in figura) è a contatto con il pallone dal punto A al punto C. Il raggio del pallone misura  $r = 11$  cm, la sua massa risulta pari a  $m = 450$  g, e il borsone ha una massa di  $M = 3$  kg. Si determini la lunghezza della porzione di fune che si trova a contatto con il pallone (il tratto AC in figura). Infine, discutere cosa succede quando la massa del borsone tende all'infinito (il significato fisico di questo limite corrisponde alla situazione in cui la massa del borsone è molto più pesante del pallone).



### Problema 2

Si vuole immettere un satellite artificiale di massa  $m = 37$  kg su di un'orbita *geostazionaria*, vale a dire un'orbita circolare di raggio tale per cui il periodo di rivoluzione del satellite risulta uguale a quello di rotazione della Terra su se stessa. Tale immissione avviene tramite i due passaggi illustrati in figura. Inizialmente, il satellite viene lanciato su di un'orbita ellittica tangente alla superficie terrestre e all'orbita geostazionaria finale (orbita blu in figura). Quando poi il satellite raggiunge il punto di contatto fra le due orbite, i suoi razzi vengono accesi (per un tempo molto breve) in modo da trasferire il satellite dall'orbita di transizione all'orbita geostazionaria. Si calcoli il lavoro compiuto dai razzi durante il trasferimento tra



le due orbite (utilizzare i valori numerici: massa della Terra  $M_T = 5.97 \times 10^{24}$  kg, raggio della Terra  $R_T = 6371$  km, costante di gravitazione universale  $G_N = 6.67 \times 10^{-11}$  N m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>).

---

### Problema 3

Un recipiente di volume  $V$  è in contatto termico con un serbatoio di temperatura  $T_1$  (per serbatoio si intende un corpo molto grande, che può scambiare calore con i corpi con cui è in contatto termico, con una variazione trascurabile della propria temperatura). Un secondo recipiente, identico al primo, è in contatto termico con un serbatoio di temperatura  $T_2$ . Si assuma che  $T_1 > T_2$ . I due recipienti condividono una parete che non permette il passaggio del calore. Ciascun recipiente contiene  $N$  molecole dello stesso gas monoatomico. Questo sistema viene mantenuto in questa condizione iniziale per un lungo tempo. Ad un certo istante, nella parete condivisa viene aperto un foro di area  $A$  molto piccola che permette il passaggio delle molecole del gas tra un recipiente e l'altro. Dopo un tempo molto lungo si raggiunge un nuovo stato stazionario di equilibrio, in cui il numero medio di molecole nel primo recipiente è  $N_1$ , ed il numero medio di molecole nel secondo recipiente è  $N_2$ . Si determini:

- (a) i valori di  $N_1$  ed  $N_2$  nel regime stazionario finale;
- (b) il rapporto  $p_1/p_2$  tra le pressioni del gas nei due recipienti, sempre nel regime stazionario finale;
- (c) la variazione dell'energia interna del gas dallo stato iniziale a quello finale, specificando se è positiva o negativa;
- (d) come varia l'entropia totale del sistema (recipienti + serbatoi) nel regime stazionario finale.

### Problema 4

- (a) Si consideri una carica elettrica puntiforme  $q > 0$  posta nel punto di coordinate Cartesiane  $(x, y, z) = (0, 0, h)$ . Si consideri un piano conduttore posto a  $z = 0$ . Calcolare la forza con cui il piano attrae la carica  $q$ .

Si può facilmente rispondere a questa domanda con il metodo della carica immagine: invece di considerare la distribuzione di carica  $\sigma$  vera e propria indotta da  $q$  sul piano si può fingere che  $\sigma = 0$  ma che esista una carica  $-q$ , detta carica immagine, locata in  $(x, y, z) = (0, 0, -h)$ . In questa situazione fittizia, la combinazione della carica reale  $q$  e della carica immagine produce un campo elettrico normale al piano, che pertanto è una superficie equipotenziale, così come deve essere nel caso vero. Si può pertanto dimostrare che questa configurazione fittizia produce il corretto campo elettrico in tutta la regione  $z > 0$  (si noti che lo stesso non vale per la regione a  $z < 0$ , ma questo è irrilevante ai fini del calcolo della forza agente sulla carica  $q$ ). Pertanto, la forza con cui il piano attrae  $q$  nel caso vero ha lo stesso valore della forza con cui la carica immagine attrae  $q$  nel caso fittizio.

Si consideri ora la seguente configurazione: una carica puntiforme  $q$  si trova alla distanza  $h$  dal centro di un conduttore sferico di raggio  $R$  (con  $h > R$ ). Il conduttore è collegato a terra.

- (b) Si calcoli la forza con cui il conduttore sferico attira  $q$ .
- (c) Si calcoli la densità superficiale di carica nel punto del conduttore sferico più vicino a  $q$ .

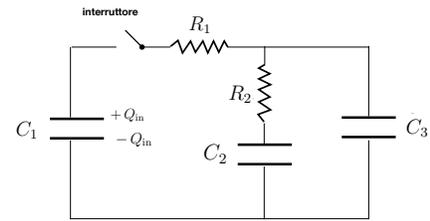
---

## Problema 5

Il circuito in figura è formato da tre condensatori, rispettivamente di capacità  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ , da due resistori, rispettivamente di resistenza  $R_1$  ed  $R_2$ , e da un interruttore. I vari elementi sono collegati da fili metallici di resistenza trascurabile. Inizialmente, l'interruttore è aperto, e una carica  $\pm Q_{in}$  è presente sulle armature del condensatore  $C_1$ , mentre gli altri condensatori sono scarichi.

Ad un certo istante l'interruttore viene chiuso. Si determinino:

- (a) La corrente che passa per ciascun resistore, un istante dopo la chiusura del circuito.
- (b) La carica presente sulle armature di ciascun condensatore, dopo che il circuito è stato chiuso per un tempo molto lungo.
- (c) L'energia totale dissipata dai resistori a partire dalla configurazione iniziale mostrata in figura fino allo stato asintotico finale raggiunto dopo che il circuito è stato chiuso per un tempo molto lungo.



## Problema 6

Due sorgenti identiche producono un suono di frequenza pari a 120 Hz. Si assuma che il suono si muove nell'aria con velocità pari a 330 m/s. Un piccolo microfono può scorrere lungo un binario rettilineo che congiunge le due sorgenti. Il microfono parte dalla posizione della prima sorgente, e si dirige verso la seconda sorgente con una velocità costante di 15 m/s.

- (a) Si calcoli il livello del suono rilevato dal microfono quand'esso si trova a metà distanza fra le due sorgenti. Si presenti un grafico (approssimativo) di come questo livello evolve nel tempo, e si descriva il grafico in modo dettagliato e quantitativo. Si assuma che le due sorgenti siano sufficientemente lontane fra loro, cosicché la posizione del microfono rispetto ad esse cambia in modo trascurabile durante l'intervallo di tempo considerato nel grafico.
- (b) Si consideri ora il livello del suono rilevato dal microfono quand'esso ha percorso  $2/3$  della distanza che separa le due sorgenti. Si presenti e si discuta un grafico approssimativo di come in questo caso il suono rilevato dal microfono evolve nel tempo. Anche in questo caso si assuma che la posizione del microfono rispetto alle sorgenti cambia in modo trascurabile durante l'intervallo di tempo considerato nel grafico.

# Soluzioni Prova Scritta di Fisica

## Soluzione Problema 1

Nella figura a fianco identifichiamo la tensione nei vari punti della fune. I moduli devono essere uguali in ogni punto e quindi abbiamo

$$|\vec{T}_0| = |\vec{T}_A| = |\vec{T}_B| = |\vec{T}_C| = T . \quad (1)$$

Il modulo di tale tensione possiamo trovarlo dal fatto che il borzone è in equilibrio e quindi la tensione deve bilanciare la forza peso

$$T = Mg . \quad (2)$$

La condizione di equilibrio per il pallone è più complicata dato che su di esso agiscono varie forze: la forza peso, la forza dal filo nel punto in cui esso è saldato al pallone ( $\vec{T}_0$  in figura) e la forza dovuta al contatto con la fune nel tratto AC. Utilizziamo un sistema di assi cartesiani come in figura e decomponiamo le prime due forze lungo le due direzioni

$$m\vec{g} = (0, -mg) , \quad (3)$$

$$\vec{T}_0 = T(\sin \alpha_1, \cos \alpha_1) . \quad (4)$$

Indichiamo con  $\vec{F}$  la terza forza, cioè la forza netta esercitata dal tratto di filo lungo AC sul pallone. Se il filo esercita sul pallone una forza  $\vec{F}$ , per il principio di azione e reazione il pallone esercita sul tratto AC la forza  $-\vec{F}$ . Sul tratto AC agiscono anche le tensioni  $\vec{T}_A$  e  $\vec{T}_C$  quindi esso sarà in quiete se vale la condizione  $\vec{T}_A + \vec{T}_C - \vec{F} = 0$ . Abbiamo quindi trovato la forza  $\vec{F}$  che andiamo a decomporre lungo i due assi cartesiani

$$\vec{F} = \vec{T}_A + \vec{T}_C = T(-\sin \alpha_2, \cos \alpha_2 - 1) . \quad (5)$$

Le condizioni per l'equilibrio del pallone risultano

$$T \sin \alpha_1 - T \sin \alpha_2 = 0 , \quad (6)$$

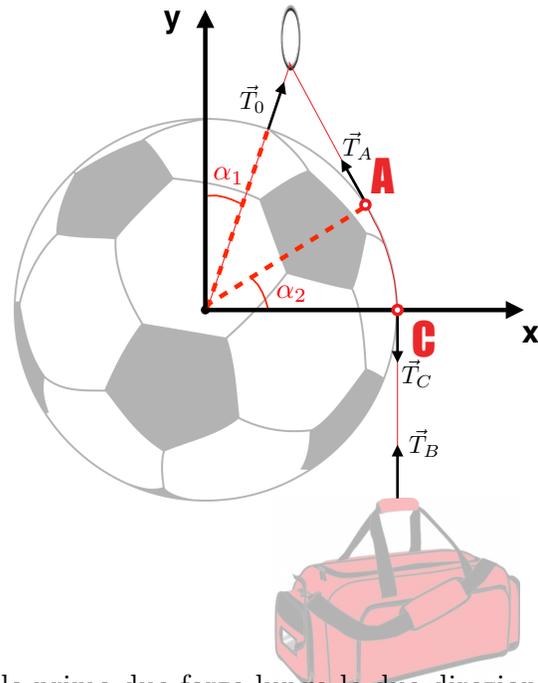
$$-mg + T \cos \alpha_1 + T \cos \alpha_2 - T = 0 . \quad (7)$$

Dalla prima condizioni concludiamo che gli angoli in figura devono essere uguali

$$\alpha_1 = \alpha_2 . \quad (8)$$

Dalla seconda ricaviamo il valore di tale angolo

$$\cos \alpha_1 = \frac{M + m}{2M} . \quad (9)$$



Concludiamo che il tratto di filo AC risulta di lunghezza pari a

$$AC = r\alpha_1 = r \arccos \left( \frac{M+m}{2M} \right). \quad (10)$$

Il risultato appena ricavato non si applica per  $M/m$  arbitrariamente grande. In questo limite, la corda diventa verticale, e tocca il pallone in un unico punto.

## Soluzione Problema 2

Iniziamo dal calcolare il raggio orbitale  $R_{\text{geo}}$  dell'orbita geostazionaria finale. L'equazione del moto del satellite si ottiene uguagliando la forza di attrazione gravitazionale alla forza centripeta

$$m \frac{v_{\text{geo}}^2}{R_{\text{geo}}} = \frac{G_N M_T m}{R_{\text{geo}}^2}. \quad (11)$$

La velocità orbitale, costante lungo la traiettoria, risulta  $v_{\text{geo}} = 2\pi R_{\text{geo}}/T_{\text{geo}}$  con il periodo dell'orbita geostazionaria uguale a  $T_{\text{geo}} = 24$  ore. Troviamo che il raggio orbitale risulta

$$R_{\text{geo}} = \left( \frac{G_N M_T}{4\pi^2} T_{\text{geo}}^2 \right)^{1/3}. \quad (12)$$

L'energia del satellite nell'orbita geostazionaria risulta

$$E_{\text{geo}} = \frac{1}{2} m v_{\text{geo}}^2 - \frac{G_N M_T m}{R_{\text{geo}}} = -\frac{G_N M_T m}{2R_{\text{geo}}}. \quad (13)$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'equazione del moto.

Calcoliamo ora l'energia del satellite nell'orbita ellittica di transizione. Utilizziamo due costanti del moto: momento angolare ed energia meccanica. Iniziamo dall'imporre che il momento angolare (valutato prendendo il centro della Terra come polo) abbia lo stesso valore al perigeo e all'apogeo

$$m v_P R_T = m v_A R_{\text{geo}}. \quad (14)$$

Lo stesso vale per l'energia meccanica totale

$$\frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{G_N M_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{G_N M_T m}{R_{\text{geo}}}. \quad (15)$$

Risolvendo possiamo determinare le velocità al perigeo e all'apogeo. Con queste informazioni possiamo valutare l'energia meccanica totale, indifferentemente al perigeo o all'apogeo, e troviamo

$$E_{\text{transizione}} = -\frac{G_N M_T m}{R_T + R_{\text{geo}}}. \quad (16)$$

Il lavoro compiuto dai razzi risulta quindi

$$L_{\text{razzi}} = E_{\text{geo}} - E_{\text{transizione}} = G_N M_T m \left( \frac{1}{R_T + R_{\text{geo}}} - \frac{1}{2R_{\text{geo}}} \right). \quad (17)$$

### Soluzione Problema 3

Iniziamo dal primo punto e determiniamo i valori di  $N_1$  e  $N_2$ . La loro somma è fissata dalla relazione  $N_1 + N_2 = 2N$ . Inoltre, la condizione di stazionarietà impone che tante molecole vanno da 1 verso 2 quante vanno da 2 a 1. Questo è garantito una volta che imponiamo che il prodotto  $n_i v_i$  sia costante da entrambi i lati, dove  $n_i$  è la densità numerica e  $v_i$  la velocità media delle molecole. Visto che i volumi sono uguali il rapporto delle densità è uguale al rapporto del numero totale di molecole. La velocità è proporzionale alla radice quadrata della temperatura. La seconda condizione può quindi essere scritta come

$$N_1 \sqrt{T_1} = N_2 \sqrt{T_2} . \quad (18)$$

Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite troviamo

$$N_1 = \frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} 2N , \quad (19)$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}} 2N . \quad (20)$$

Il rapporto tra le pressioni può essere calcolato utilizzando l'equazione di stato

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{N_1 T_1}{N_2 T_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} . \quad (21)$$

La variazione di energia si calcola come segue. Inizialmente abbiamo

$$U_{\text{iniziale}} = \frac{3}{2} N k (T_1 + T_2) . \quad (22)$$

Nel regime stazionario invece abbiamo

$$U_{\text{finale}} = \frac{3}{2} k (N_1 T_1 + N_2 T_2) = 3 N k \sqrt{T_1 T_2} . \quad (23)$$

La variazione di energia risulta

$$\Delta U = U_{\text{finale}} - U_{\text{iniziale}} = 3 N k \left[ \sqrt{T_1 T_2} - \frac{T_1 + T_2}{2} \right] \leq 0 . \quad (24)$$

L'ultima relazione deriva dalla nota disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica.

Infine, calcoliamo come l'entropia varia nel tempo nel regime stazionario. L'entropia del gas non cambia perché l'entropia è una funzione di stato. Per quanto riguarda le sorgenti il discorso è più complicato. Consideriamo la quantità di molecole  $\Delta N_1$  che in un intervallo di tempo  $\Delta t$  passa dalla sezione 2 alla sezione 1, e allo stesso modo  $\Delta N_2$  nell'altra direzione. Abbiamo

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} \frac{N_1 v_1}{V} A = \frac{1}{6} \frac{N_2 v_2}{V} A = \frac{\Delta N_2}{\Delta t} . \quad (25)$$

Il calore assorbito dalle sorgenti nell'unità di tempo risulta

$$\frac{\Delta Q_1^{\text{sor}}}{\Delta t} = - \frac{\Delta N_1}{\Delta t} (T_1 - T_2) = - \frac{1}{6} \frac{N_1 v_1}{V} A (T_1 - T_2) < 0 , \quad (26)$$

$$\frac{\Delta Q_2^{\text{sor}}}{\Delta t} = \frac{\Delta N_2}{\Delta t} (T_1 - T_2) = \frac{1}{6} \frac{N_2 v_2}{V} A (T_1 - T_2) > 0 . \quad (27)$$

La variazione di entropia nell'unità di tempo risulta

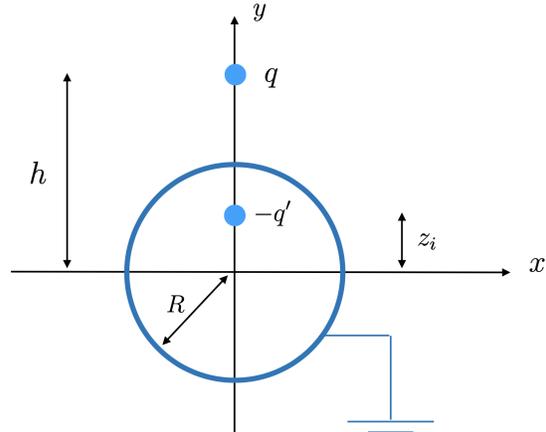
$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{T_1} \frac{\Delta Q_1^{\text{sor}}}{\Delta t} + \frac{1}{T_2} \frac{\Delta Q_2^{\text{sor}}}{\Delta t} = \frac{1}{6} \frac{N_2 v_2}{V} A (T_1 - T_2) \left[ \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right] > 0 . \quad (28)$$

## Soluzione Problema 4

(i) La forza è data da

$$\vec{F} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{h^2} \hat{u}_z \quad (29)$$

(ii) Centriamo il conduttore nella regione  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  e mettiamo la carica  $q$  alla posizione  $(x, y, z) = (0, 0, h)$ . Per simmetria, la carica immagine si deve trovare lungo l'asse  $z$ . Ci aspettiamo che questa carica sia negativa, e indichiamo il suo valore come  $-q'$ , dove  $q'$  è una quantità positiva, che vedremo essere diversa da  $q$ . Indichiamo la posizione della carica immagine con  $(x, y, z) = (0, 0, z_i)$ . Ci chiediamo per quali valori di  $q'$  e di  $z_i$  il potenziale elettrico generato dalla carica vera e da quella immagine si annulla sulla superficie della sfera. Richiediamo questo in quanto, nel caso vero, il conduttore sferico è collegato a terra e pertanto ha potenziale nullo.



Ci bastano due equazioni per le due incognite  $q'$  e  $z_i$ . Valutiamo  $V = 0$  ai punti  $z = \pm R$  della superficie della sfera

$$\begin{cases} \frac{q}{h-R} - \frac{q'}{R-z_i} = 0 \\ \frac{q}{h+R} - \frac{q'}{R+z_i} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

che dà

$$\begin{cases} q(R - z_i) = q'(h - R) \\ q(R + z_i) = q'(h + R) \end{cases} \quad (31)$$

Sommando le due equazioni, troviamo

$$2qR = 2q'h \Rightarrow q' = \frac{R}{h} q \quad (32)$$

Sottraendole, e usando quanto appena trovato,

$$2qz_i = 2q'R \Rightarrow qz_i = \frac{R}{h} qR \Rightarrow z_i = \frac{R^2}{h} \quad (33)$$

cioè la carica immagine si trova dentro la sfera.

Verifichiamo ora (cosa non richiesta dal problema) che questi valori danno un potenziale nullo su tutta la superficie del conduttore. Per un generico punto danno

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{\frac{R}{h}q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \frac{R^2}{h})^2}} \right] \quad (34)$$

Sulla superficie della sfera abbiamo  $x^2 + y^2 = R^2 - z^2$ , e, pertanto

$$\begin{aligned}
 V_{\text{superficie}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 - z^2 + (z-h)^2}} - \frac{R}{h} \frac{1}{\sqrt{R^2 - z^2 + (z - \frac{R^2}{h})^2}} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2zh}} - \frac{R}{h} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{R^4}{h^2} - 2\frac{R^2}{h}z}} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2zh}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + R^2 - 2hz}} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{35}$$

Abbiamo pertanto verificato che la carica immagine da noi trovata è corretta. La forza con cui la carica  $q$  è attratta ha pertanto modulo

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{R}{h} q}{(h - \frac{R^2}{h})^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{h R}{(h^2 - R^2)^2} \tag{36}$$

ed è diretta verso il centro della sfera.

(iii) La figura mostra la direzione del campo elettrico esternamente al conduttore, nel punto di nostro interesse. All'interno il campo elettrico si annulla.

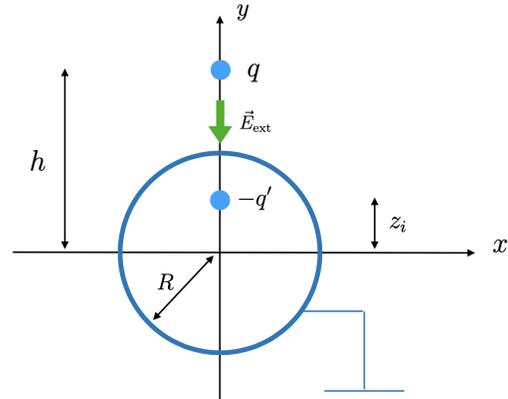
Sappiamo dal teorema di Gauss che la discontinuità del campo elettrico è data dalla densità superficiale moltiplicata per la costante dielettrica del vuoto

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \hat{n} \tag{37}$$

dove  $\hat{n}$  è la normale nel punto, diretta verso l'esterno.

Il campo elettrico esterno è dato dalla somma dei campi elettrici prodotti da  $q$  e da  $-q'$ . Abbiamo pertanto

$$\sigma_{\text{vicino}} = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{q}{(h-R)^2} + \frac{q'}{(R-z_i)^2} \right] = \dots = -\frac{q(h+R)}{4\pi R(h-R)^2} \tag{38}$$



## Soluzione Problema 5

Subito dopo la chiusura dell'interruttore, i condensatori  $C_2$  e  $C_3$  sono ancora scarichi, e non vi è una differenza di potenziale tra le loro armature. Ai fini di calcolare la corrente che arriva alle loro armature, essi possono pertanto essere considerati come dei fili con resistenza nulla. Pertanto, tutta la corrente che arriva al vertice in alto fluisce verso il condensatore  $C_3$ . Se denotiamo con  $I_i$  la corrente che attraversa il resistore  $R_i$ , abbiamo quindi

$$I_1 = \frac{Q_{\text{in}}}{C_1 R_1} \quad , \quad I_2 = 0 \tag{39}$$

Denotiamo con  $\pm Q_{i,f}$  la carica finale sul condensatore  $C_i$ . Nello stato asintotico finale non vi sono più correnti nel circuito. La carica  $Q_{\text{in}}$  si redistribuisce sui tre condensatori, in modo che la stessa differenza di potenziale  $\frac{Q_i}{C_i}$  sia presente in ciascuno di essi. Pertanto

$$Q_{1,f} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} Q_{\text{in}} \quad , \quad Q_{2,f} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 + C_3} Q_{\text{in}} \quad , \quad Q_{3,f} = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} Q_{\text{in}} \quad (40)$$

L'energia dissipata dai resistori è uguale alla variazione di energia contenuta nei condensatori (configurazione iniziale meno configurazione finale). Abbiamo l'energia iniziale

$$U_{\text{in}} = \frac{Q_{\text{in}}^2}{2C_1} \quad (41)$$

e l'energia finale

$$\begin{aligned} U_f &= \frac{Q_{1,f}^2}{2C_1} + \frac{Q_{2,f}^2}{2C_2} + \frac{Q_{3,f}^2}{2C_3} = \frac{Q_{\text{in}}^2}{2} \left[ \frac{C_1}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} + \frac{C_2}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} + \frac{C_3}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} \right] \\ &= \frac{Q_{\text{in}}^2}{2(C_1 + C_2 + C_3)} \end{aligned} \quad (42)$$

dove, incidentalmente troviamo la capacità equivalente dei tre condensatori collegati in parallelo. Abbiamo pertanto l'energia dissipata

$$U_{\text{dissipata}} = \frac{Q_{\text{in}}^2}{2C_1} - \frac{Q_{\text{in}}^2}{2(C_1 + C_2 + C_3)} = \frac{Q_{\text{in}}^2 (C_2 + C_3)}{2C_1 (C_1 + C_2 + C_3)} \quad (43)$$

## Soluzione Problema 6

(i) Denotiamo con  $f_0 = 120$  Hz la frequenza del suono emesso dalle due sorgenti. Denotiamo con  $v_s = 330$  m/s la velocità del suono, e con  $v = 15$  m/s la velocità del microfono. A causa dell'effetto Doppler, il microfono rileva un suono di frequenza

$$f_1 = \frac{v_s - v}{v_s} f_0 \simeq 114.5 \text{ Hz} \quad (44)$$

dalla prima sorgente (quella da cui si sta allontanando), e di frequenza

$$f_2 = \frac{v_s + v}{v_s} f_0 \simeq 125.5 \text{ Hz} \quad (45)$$

dalla seconda sorgente (quella a cui si sta avvicinando).

Trovandosi ad uguale distanza tra le due sorgenti, la persona sente i due suoni con uguale ampiezza  $A$ . Il suono ricevuto è la somma dei due, ed ha ampiezza

$$\begin{aligned} y &= A \sin(f_1 2\pi t) + A \sin(f_2 2\pi t) \\ &= 2A \sin\left(\frac{f_1 + f_2}{2} 2\pi t\right) \cos\left(\frac{f_2 - f_1}{2} 2\pi t\right) \\ &\simeq 2A \sin(120 \text{ Hz} \times 2\pi t) \cos(5.5 \text{ Hz} \times 2\pi t) \end{aligned} \quad (46)$$

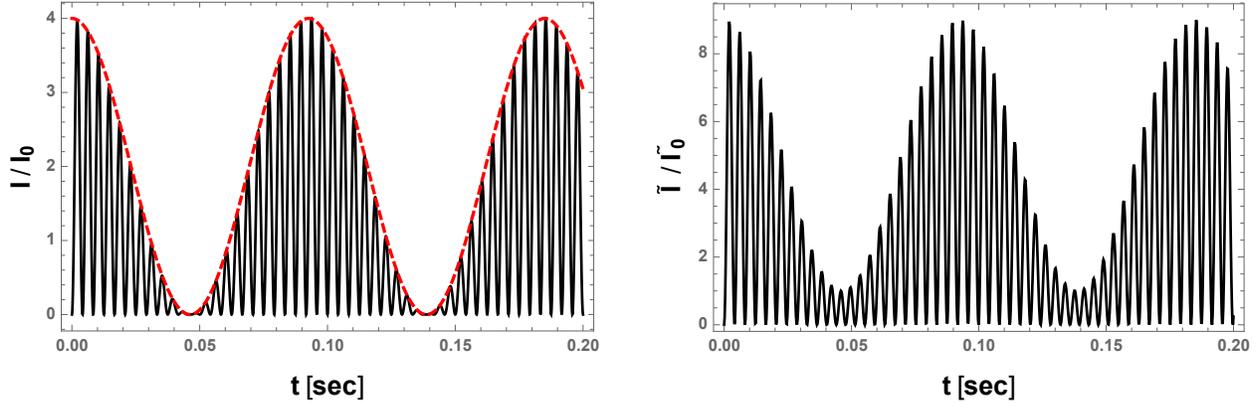


Figure 1: Sinistra: evoluzione temporale dell'intensità del suono rilevato dal microfono quando si trova a metà strada tra le due sorgenti. Destra: Evoluzione temporale dell'intensità del suono rilevato dal microfono quando si trova a  $2/3$  della distanza tra le due sorgenti. In questo caso,  $\tilde{I}_0$  denota l'intensità prodotta dalla sorgente più lontana.

Il livello del suono è la sua intensità, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Pertanto

$$I = 4I_0 \sin^2(120 \text{ Hz} \times 2\pi t) \cos^2(5.5 \text{ Hz} \times 2\pi t) \quad (47)$$

dove  $I_0$  è l'ampiezza dell'intensità prodotta da una delle due sorgenti.

Abbiamo il fenomeno dei battimenti, ottenuto sommando due suoni di simile frequenza. Poiché il periodo del quadrato del coseno è metà del periodo del coseno, la frequenza di modulazione è pari a  $2 \times \frac{f_2 - f_1}{2} = f_2 - f_1 \simeq 10.9 \text{ Hz}$ .

La presenza delle due frequenze (quella del suono risultante, e quella della modulazione) è chiaramente visibile in figura. Nei massimi della modulazione, l'intensità è 4 volte rispetto l'intensità prodotta da una singola sorgente (interferenza costruttiva). Nei minimi, l'intensità è nulla (interferenza distruttiva).

(ii) Ricordiamo che l'ampiezza del suono emesso da una sorgente scala come  $\frac{1}{\text{distanza}}$  dalla sorgente, per cui l'intensità scala come  $\frac{1}{\text{distanza}^2}$ . In questo caso, se denotiamo come  $\tilde{A}$  l'ampiezza del suono prodotto dalla prima sorgente alla posizione del microfono, l'ampiezza del suono prodotto dalla seconda sorgente vale  $2\tilde{A}$  (in quanto il microfono si trova ad una distanza doppia dalla prima sorgente rispetto la seconda). Pertanto

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \tilde{A} \sin(f_1 2\pi t) + 2\tilde{A} \sin(f_2 2\pi t) \\ &\simeq \tilde{A} \sin(114.5 \text{ Hz } 2\pi t) + 2\tilde{A} \sin(125.5 \text{ Hz } 2\pi t) \end{aligned} \quad (48)$$

Osserviamo anche in questo caso il fenomeno dei battimenti. Come prima, esiste un intervallo di tempo in cui i due suoni si sommano in fase, alternato ad un intervallo di tempo in cui i due suoni si sommano in controfase. Nell'intervallo in fase l'ampiezza è tripla rispetto all'ampiezza del suono generato dalla sorgente più lontana, e l'intensità è 9 volte più grande. Nell'intervallo in controfase l'ampiezza, e l'intensità, sono uguali a quelle del suono generato dalla sorgente più lontana.