1 Logica e matematica di base

——— PRIMA cinquina———————-

Esercizio 1 Si sa che *Chi disprezza compra* e che *Non è tutto oro quello che luccica.* Sappiamo inoltre che Arturo ha comprato una collana luccicante. Allora

(a) la collana è d'argento

(b) Arturo disprezza la collana

(c) la collana non è d'oro oppure Arturo la disprezza

(d) nessuna delle altre risposte

Esercizio 2 Un bimbo scrive sulle facce di un cubo i numeri da 1 a 6. Un numero su ciascuna faccia. Sapendo che le facce di tre numeri consecutivi hanno sempre un vertice in comune, dire quale numero si trova sulla faccia opposta al 5.

(a) 1

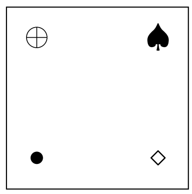
(b) 2

(c) 3

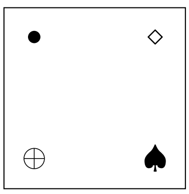
(d) 4

Esercizio 3

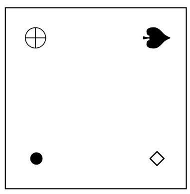
Quale figura è attenuta ruotando e capovolgendo quella a destra?



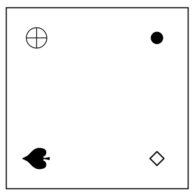
A



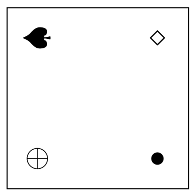
B



C



D



Esercizio 4 Si consideri una griglia quadrata 3x3 e si considerino i 16 vertici dei quadrati che la compongono. Tra tali vertici se ne scelgano N in modo che, tra questi N vertici, non ve ne siano 3 che si trovano allineati; qual è il valore massimo possibile per N?

(a) 6

(b) 7

(c) 8

(d) 9

Esercizio 5 Consideriamo le quaterne di numeri interi a, b, c, d tali che:

- $a > b > c > d$
- $a + b + c + d = 10000$
- $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 10000$

Qual è il più piccolo valore possibile di a per cui esiste una tale quaterna?

(a) 2503
(b) nessuna delle altre soluzioni
(c) 2501
(d) 2502

———————— SECONDA cinquina ————————

Esercizio 6 Un punto (i, j) nel piano cartesiano a coordinate intere si dice visibile dall'origine se è diverso dall'origine $(0, 0)$ e il segmento che congiunge (i, j) e l'origine $(0, 0)$ non contiene punti a coordinate (entrambe) intere che non siano $(0, 0)$ e (i, j) stessi. Quanti sono i punti a coordinate intere visibili dall'origine che distano al più 5 dall'origine stessa?

(a) 40

(b) 48

(c) 52

(d) nessuna delle altre risposte

Esercizio 7 Si sa che, per ogni calcio di rigore tirato, esso ha probabilità $1/2$ di essere segnato. Per ogni $k \geq 1$ intero si indichi con p_k la probabilità che, tirando $2k$ calci di rigore, se ne segnino esattamente k. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) $p_k = 1/2$ per ogni k

(b) p_k decresce al crescere di k

(c) p_k cresce al crescere di k

(d) nessuna delle altre risposte è vera.

Esercizio 8 Consideriamo il sistema dato dalle due equazioni, dove ln indica il logaritmo naturale:

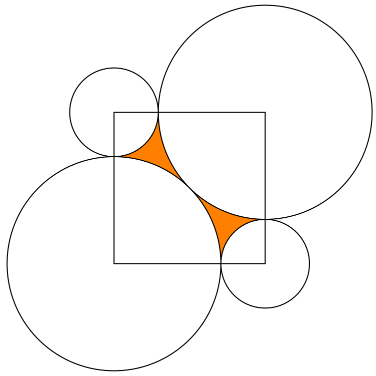
$$\ln(x + y) - \ln(x - y) + \ln 3 = \ln x$$
$$e^x = \frac{e^{25}}{e^y}$$

Quante sono le coppie di numeri reali (x, y) (ovviamente con $x + y > 0$, $x - y > 0$, $x > 0$) che soddisfano il sistema?

(a) una
(b) due
(c) infinite
(d) nessuna

Esercizio 9

Cosideriamo un quadrato di lato 1 e quattro cerchi centrati nei vertici e tangenti come in figura. Calcolare l'area della regione del quadrato non coperta dai cerchi.



(a) $1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\pi$

(b) $\frac{1}{4\pi}$

(c) $\frac{1}{8}$

(d) $1 - \frac{\pi}{4}$

Esercizio 10 Un benefattore vuole distribuire 38 milioni di euro a 12 città, appartenenti a 3 regioni. In una delle regioni le città beneficiate sono x, in un'altra y, in un'altra ancora z, e supponiamo che $1 \leq x \leq y \leq z$. Dopo aver fatto alcuni conti, il benefattore conclude che riuscirà a spartire i 38 milioni in modo che ogni città riceva esattamente tanti milioni quante sono le altre città beneficiate nella sua regione. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

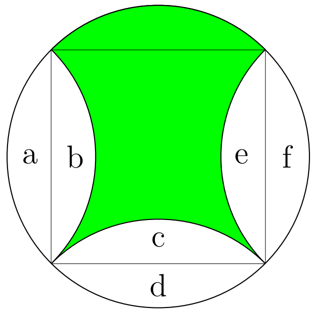
(a) il benefattore ha sbagliato i conti: non è possibile, qualunque siano i numeri x, y, z.
(b) se il benefattore ha fatto bene i conti, i numeri x, y, z sono univocamente determinati.
(c) anche se il benefattore ha fatto bene i conti, i numeri x, y, z non sono univocamente determinati: ci sono due diverse possibilità.
(d) anche se il benefattore ha fatto bene i conti, i numeri x, y, z non sono univocamente determinati: ci sono tre diverse possibilità.

——————TERZA cinquina——————

Esercizio 11 Data una successione $\{x_n\}$ di numeri reali, consideriamo la seguente affermazione:
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N > 0$ tale che per ogni coppia di interi (m, n) con $m > N$ e $n > N$ vale $|x_n - x_m| < \epsilon$.
Quale delle seguenti affermazioni costituisce la negazione della affermazione scritta qui sopra?

(a) la successione converge.
(b) $\exists \epsilon > 0$ tale che $\forall N > 0$ per ogni coppia di interi (m, n) con $m > N$ e $n > N$ vale $|x_n - x_m| \geq \epsilon$.
(c) $\exists \epsilon > 0$ tale che $\forall N > 0$ esiste una coppia di interi (m, n) con $m > N$, $n > N$ e $|x_n - x_m| \geq \epsilon$.
(d) $\exists \epsilon > 0$ tale che $\forall N > 0$ non esiste una coppia di interi (m, n) con $m > N$ e $n > N$ tale che $|x_n - x_m| < \epsilon$.

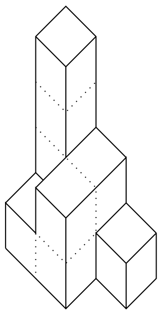
Esercizio 12 Nella figura è rappresentato un cerchio di raggio 1 cm, un quadrato inscritto, e sei regioni a, b, c, d, e ed f tra loro congruenti. Si consideri la regione in verde. Qual è la lunghezza massima possibile per il raggio di un cerchio contenuto nella figura verde?

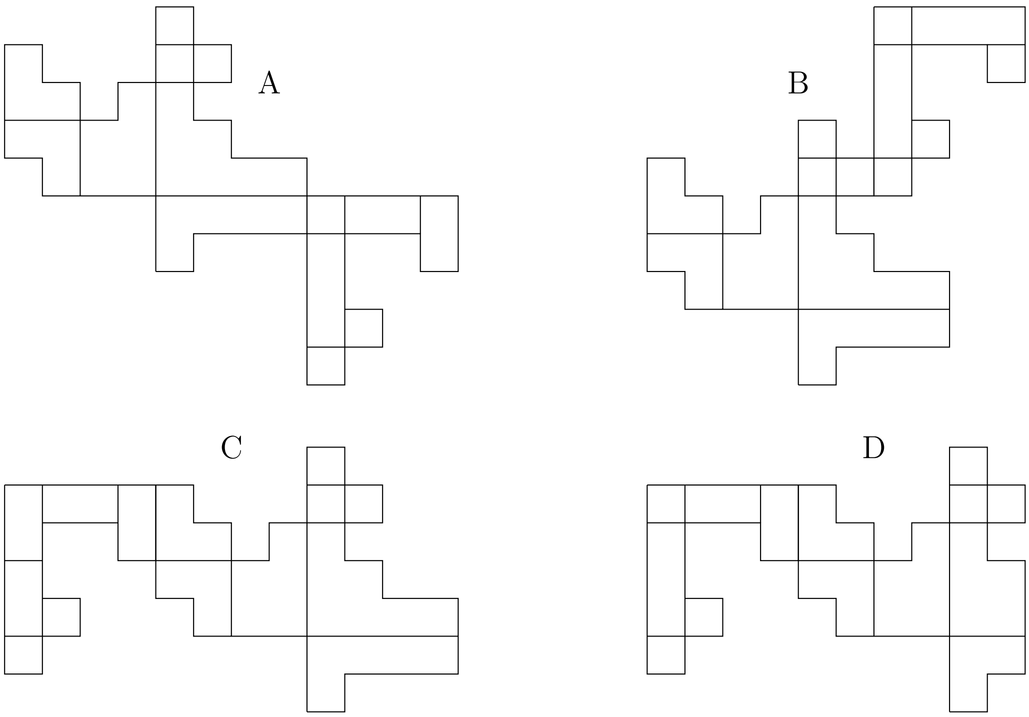


(a) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ cm
(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm
(d) 0,5 cm

Esercizio 13

Qual è lo sviluppo piano del solido in figura? (Il solido in figura ha 14 facce tutte parallele o ortogonali tra di loro)





(a) A

(b) B

(c) C

(d) D

Esercizio 14 Ilaria ed Orazio sono due fratelli appassionati lettori e possiedono molti libri, ma li tengono in due distinte librerie, una a casa di Ilaria e una a casa di Orazio. Ogni anno a febbraio si scambiano vari libri: Ilaria consegna ad Orazio il 16% dei libri che aveva in casa a gennaio, e Orazio consegna ad Ilaria il 34% dei libri che aveva in casa a gennaio. Risulta che a gennaio 2021 il 65% dei libri è in casa di Ilaria. Qual era la percentuale dei libri che erano in casa di Ilaria a gennaio 2019?

(a) 42%
(b) 46%
(c) 52%
(d) 56%

Esercizio 15 Consideriamo nel piano cartesiano il rettangolo di vertici $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,2)$, $(4,2)$. Sia X l'insieme dato dai 15 punti a coordinate intere contenuti nel suo interno o sul suo bordo. Un punto $A \in X$ si dice *speciale* se l'insieme $X \setminus \{A\}$ può essere suddiviso in due insiemi $\{A_1, ...A_7\}$, $\{B_1, ..., B_7\}$ tali che la somma delle ascisse dei punti $A_1, ...A_7$ sia uguale alla somma delle ascisse dei punti $B_1, ..., B_7$ e lo stesso valga per la somma delle ordinate.
Quandi punti speciali ci sono in X?

(a) nessuno
(b) 1
(c) 3
(d) 7

2 Matematica

——————— PRIMA cinquina ———————

Esercizio 16 Sia n un intero con $n \geq 2$. Sia r_n il resto della divisione di $n(n+1)(n+2)$ per $(n-1)$. Quale delle seguenti affermazioni sulla successione dei numeri r_n (con $n \geq 2$) è corretta?

(a) la successione non è limitata, ossia per ogni $N > 0$ esiste un numero intero n tale che $r_n > N$.
(b) la successione assume complessivamente solo un numero finito di valori, senza diventare mai costante.
(c) la successione assume solo un numero finito di valori, diventando definitivamente costante.
(d) la successione è non decrescente.

Esercizio 17 Dire quanti sono gli interi x maggiori o uguali a 3 che soddisfano l'equazione:

$$12\binom{x}{2} + 15\binom{x}{3} = 80x$$

(a) uno
(b) due
(c) tre
(d) infiniti

Esercizio 18 Sia Γ una circonferenza di raggio unitario e siano A, B due punti di Γ tali che $\overline{AB} = \sqrt{3}$. Qual è la probabilità che, scelto a caso un terzo punto $C \in \Gamma$, il triangolo di vertici A, B, C sia acutangolo?

(a) $1/6$

(b) $1/\sqrt{3}$

(c) $1/3$

(d) $1/2$

Esercizio 19 Sia M il prodotto di tutti i numeri della forma $\frac{i}{j}$ con i, j interi tali che $1 \leq i < j \leq 2021$:

$$M = \prod_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{i}{j}$$

Qual è il più piccolo tra i seguenti numeri?

(a) $\left(\dfrac{1}{2021}\right)^{((2021)^2)}$

(b) M

(c) $\left(\dfrac{1}{2^{673}}\right)^{675}$

(d) $\dfrac{1}{30^{10000}}$.

Esercizio 20 Siano $a < b$ due numeri reali positivi. Consideriamo le due successioni x_n e y_n definite da: $x_0 = a, y_0 = b$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}$$

Cosa si può dire dei limiti $\lim_{n\to+\infty} x_n$ e $\lim_{n\to+\infty} y_n$?

(a) converge solo $\lim_{n\to+\infty} x_n$
(b) converge solo $\lim_{n\to+\infty} y_n$
(c) convergono entrambi, a due numeri reali diversi.
(d) convergono entrambi, allo stesso numero reale.

—————————— SECONDA cinquina ——————————-

Esercizio 21 In una stanza ci sono 100 persone numerate da 1 a 100. A, B e C sono tre sottoinsiemi disgiunti di persone. L'insieme A è costituito dalle persone con i numeri multipli di a. L'insieme B è costituito dai multipli di b che non sono multipli di a, infine l'insieme C è costituito dai multipli di c che non sono multipli di a o b. Sapendo che che gli insiemi A, B e C sono costituiti dallo stesso numero di persone e a, b e c sono tre interi positivi la cui somma è 11 quanto vale b?

(a) b=3

(b) b=4

(c) b=5

(d) b=6

Esercizio 22 In un torneo si affrontano in semifinale le squadre A-B e C-D; le vincenti delle semifinali si sfidano in finale e la vincitrice della finale si aggiudica il torneo. Diciamo che la squadra X *è più forte* della squadra Y se la probabilità che X vinca giocando contro Y è superiore al 50%. Sappiamo che A è più forte di tutte le altre squadre, che B è più forte sia di C che di D e che C è più forte di D.
Possiamo allora dedurre che

(a) certamente la squadra con più alta probabilità di vincere il torneo è la A

(b) in tutti i casi, la finale meno probabile è quella tra A e D

(c) non è impossibile che la squadra con più alta probabilità di vincere il torneo sia la C

(d) nessuna delle altre risposte

Esercizio 23 Si consideri nel piano una circonferenza di centro O e raggio unitario; siano poi A, B due punti sulla circonferenza tali che $A\hat{O}B = 135°$. Si consideri una particella puntiforme che dal punto di partenza A si dirige in linea retta verso B; ogni volta che la particella tocca la circonferenza rimbalza su di essa in maniera standard ovvero in modo tale che angolo di incidenza e angolo di riflessionein siano uguali. Qual è la lunghezza percorsa dalla particella dalla partenza fino al momento in cui essa ritorna, per la prima volta, nel punto A?

(a) $4\sqrt{2}$

(b) $8\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(c) $8\sqrt{2}$

(d) nessuna delle altre risposte

Esercizio 24 Si consideri la disuguaglianza

$$2a^2 + 6 \geq 2\sqrt{a^2+1} + 4a$$

Sia X l'insieme degli $a \in \mathbb{R}$ per cui la disuguaglianza è falsa. Quale delle seguenti affermazioni è vera ?

(a) X è un intervallo non vuoto in $\mathbb{R}$.
(b) X è un insieme infinito e non limitato
(c) X è vuoto
(d) X è finito

Esercizio 25 Sia Γ una circonferenza di raggio 5 e siano A, B, C tre punti di Γ; si sa che $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} \geq 8$ e $\overline{BC} \geq 8$. Quanto vale, al massimo, la lunghezza $\overline{AC}$?

(a) 48/5

(b) 10

(c) 8

(d) nessuna delle altre risposte.

Soluzioni
Logica e matematica di base
1) (d)
2) (b)
3) (c)
4) (c)
5) (d)
6) (b)
7) (b)
8) (a)
9) (a)
10) (b)
11) (c)
12) (d)
13) (a)
14) (d)
15) (c)
Matematica
16) (c)
17) (a)
18) (c)
19) (a)
20) (d)
21) (b)
22) (c)
23) (d)
24) (c)
25) (a)