Università degli Studi di Padova, Scuola Galileiana di Studi Superiori
Classe di Scienze Naturali – **Prova scritta di Fisica** (9 Settembre 2022)

Problema 1

Ad una certa ora del mattino inizia a nevicare, e a mezzogiorno uno spalaneve parte per pulire le strade. La neve continua a cadere con intensità costante. Si sa che la velocità con cui procede lo spazzaneve è inversamente proporzionale all'altezza della neve. Nelle prime due ore di lavoro lo spazzaneve riesce a pulire 4 km di strada. Nelle due ore successive invece se ne liberano solo 2 km. A che ora ha iniziato a nevicare?

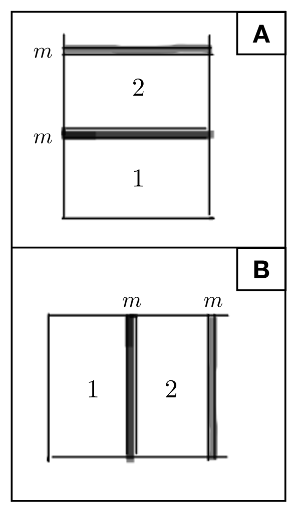
Problema 2

Una vasca rettangolare è riempita parzialmente di liquido, e viene fatta scendere su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Il livello del liquido quando la vasca è orizzontale e in quiete è h, e la sua densità ρ. Le condizioni iniziali sono scelte in modo tale che il liquido rimanga in quiete rispetto alla vasca.

- **(a)** Calcolare l'accelerazione della vasca.
- **(b)** Descrivere la forma che assume la superficie del liquido.
- **(c)** Calcolare la pressione sul fondo della vasca.

Problema 3

Il recipiente in figura di sezione S è diviso in due parti da due setti scorrevoli di massa m. Le pareti del recipiente ed i setti sono impermeabili al calore. I due volumi sono occupati ciascuno da una mole di un gas perfetto monoatomico, ed il sistema si trova inizialmente all'equilibrio (la pressione esterna è quella atmosferica p_{atm}) con entrambi i gas ad una temperatura T_0.



- **(a)** Determinare pressioni e volumi dei due gas nello stato iniziale (stato A in figura).

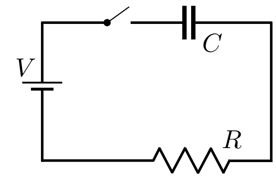
Si ruoti ora il recipiente di 90° poggiandolo su un fianco; si faccia l'operazione in modo da lasciare istantaneamente invariate le coordinate termodinamiche del gas. Si attenda un tempo sufficiente affinché si raggiunga un nuovo equilibrio (stato B in figura).

- **(b)** Determinare le nuove temperature e volumi dei due gas.
- **(c)** Dire di quanto è variata l'entropia del sistema.
- **(d)** Calcolare il lavoro fatto dal gas nella trasformazione tra lo stato A a quello B.

Problema 4

Una sorgente emette onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda $\lambda = 600\,\text{nm}$. Si fanno passare tali onde attraverso una doppia fenditura caratterizzata dalle seguenti proprietà: distanza tra le fenditure $d = 21.5\,\mu\text{m}$, e larghezza di ciascuna fenditura $a = 5.2\,\mu\text{m}$. Quante frange chiare si contano entro il picco centrale dell'inviluppo di diffrazione?

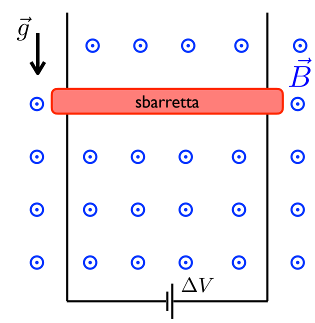
Problema 5



Si consideri il circuito a lato composto da un interruttore (inizialmente aperto), un generatore di forza elettromotrice V, una resistenza R, e un condensatore a facce quadrate parallele di lato L poste a distanza d. Si supponga di poter trascurare gli effetti di bordo ($L \gg l$). Si chiude l'interruttore e si lascia caricare il condensatore. Si risponda ai seguenti quesiti esprimendo le risposte in funzione dei dati forniti dal problema e della costante dielettrica del vuoto ϵ_0.

- **(a)** Quanta energia viene dissipata nella resistenza durante la carica?
- **(b)** Quanto vale il modulo della forza F_0 con cui le due armature si attraggono?
- **(c)** Il condensatore viene lasciato connesso al generatore e si raddoppia la distanza tra le sue armature. Come varia F_0?
- **(d)** Il condensatore viene prima scollegato dal generatore e successivamente viene raddoppiata la distanza tra le sue armature. Come varia F_0?

Problema 6



Una sbarretta conduttrice di lunghezza $l = 90\,\text{cm}$, resistenza $R = 2\,\Omega$ e massa $m = 100\,\text{g}$ può scorrere senza attrito con le estremità a contatto con due guide parallele disposte verticalmente. La resistenza delle guide verticali è trascurabile. Tra gli estremi inferiori delle guide viene garantita da un generatore una differenza di potenziale pari a $\Delta V = 10\,\text{V}$, e il tutto si trova immerso in un campo magnetico uniforme di modulo B uscente dal foglio (si veda la figura a lato). Si utilizzi per il campo gravitazionale il valore numerico $g = 9.8\,\text{m/s}^2$.

- **(a)** Quanto deve valere il campo magnetico affinché la sbarretta resti in equilibrio?
- **(b)** Quanto vale la corrente che scorre nel circuito in questa configurazione di equilibrio?
- **(c)** Si consideri ora la situazione in cui la sbarretta viene inizialmente tenuta ferma e il modulo del campo magnetico risulta inferiore a quello che garantisce l'equilibrio. La sbarretta viene lasciata libera di muoversi. Si derivi l'equazione del moto e si discuta l'evoluzione del sistema.

Soluzione Problema 1

Sia t_0 l'istante in cui inizia a nevicare e t_S l'istante in cui lo spazzaneve inizia ad operare. Sappiamo che t_S corrisponde a mezzogiorno. Introduciamo l'intervallo temporale positivo

$$\Delta t \equiv t_S - t_0 \ . \tag{1}$$

Il nostro scopo è calcolare Δt. La neve cade con intensità costante quindi il livello di altezza $h(t)$ della neve stessa varia nel tempo in accordo con la relazione

$$h(t) = v_N(t - t_0) \qquad\qquad (t \geq t_0) \ . \tag{2}$$

Di conseguenza, la velocità con cui procede lo spalaneve risulta

$$v_S(t) = \frac{\alpha}{h(t)} = \frac{\alpha}{v_N}\frac{1}{(t-t_0)} \qquad\qquad (t \geq t_0) \ . \tag{3}$$

La conoscenza delle due quantità costanti v_N e α non risulterà necessaria ai fini della risoluzione del problema.

Il problema ci fornisce informazioni riguardo le prime due ore di lavoro dello spalaneve, e le successive due ore. Introduciamo dunque l'intervallo temporale

$$\tau = 2\,\text{ore} \ . \tag{4}$$

Possiamo procedere e mettere in equazioni le informazioni che il problema ci fornisce

$$s_1 = \int_{t_S}^{t_S+\tau} v_S(t)dt = \frac{\alpha}{v_N}\int_{t_S}^{t_S+\tau}\frac{dt}{(t-t_0)} = \frac{\alpha}{v_N}\ln\left(\frac{\Delta t+\tau}{\Delta t}\right) = 4\,\text{km} \ , \tag{5}$$

$$s_2 = \int_{t_S+\tau}^{t_S+2\tau} v_S(t)dt = \frac{\alpha}{v_N}\int_{t_S+\tau}^{t_S+2\tau}\frac{dt}{(t-t_0)} = \frac{\alpha}{v_N}\ln\left(\frac{\Delta t+2\tau}{\Delta t+\tau}\right) = 2\,\text{km} \ . \tag{6}$$

Prendiamo ora il rapporto tra queste due equazioni e troviamo

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\ln\left(\frac{\Delta t+\tau}{\Delta t}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta t+2\tau}{\Delta t+\tau}\right)} = 2 \ . \tag{7}$$

Utilizzando le note proprietà del logaritmo otteniamo la relazione

$$\frac{\Delta t+\tau}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta t+2\tau}{\Delta t+\tau}\right)^2 \ . \tag{8}$$

La soluzione (positiva) della risultate equazione algebrica di secondo grado fornisce il risultato

$$\Delta t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\tau \simeq 1\,\text{ora} + 14\,\text{minuti} + 10\,\text{secondi} \ . \tag{9}$$

Questo è quanto prima di mezzogiorno ha iniziato a nevicare. Pertanto l'orario desiderato risulta approssimativamente

$$t_0 : \qquad 10{:}45{:}50 \ . \tag{10}$$

Soluzione Problema 2

L'accelerazione si ottiene considerando la componente della forza peso parallela al piano inclinato

$$a = g\sin\theta \ . \tag{11}$$

Per trovare la forma del fluido consideriamo un sistema solidale alla vasca in movimento e identifichiamo le forze che agiscono su un elemento di fluido infinitesimo di massa δm posto sulla superficie. Abbiamo la forza apparente dovuto al fatto che il sistema è non inerziale e quindi

$$F_{\text{N.I.}} = \delta m\, g(-\sin\theta, 0) \ . \tag{12}$$

Inoltre abbiamo la forza peso che è inclinata rispetto alla verticale

$$F_p = \delta m\, g(\sin\theta, -\cos\theta) \ . \tag{13}$$

La somma delle forze risulta

$$F_{\text{N.I.}} + F_p = \delta m\, g(0, -\cos\theta) \ . \tag{14}$$

La superficie deve disporsi in direzione ortogonale e quindi sarà parallela al piano inclinato.

La pressione sul fondo può essere calcolato in modo analogo e dall'ultima equazione vediamo che soltanto una componente della forza peso è rilevante

$$p_{\text{fondo}} = \rho g h \cos\theta \ . \tag{15}$$

Soluzione Problema 3

Iniziamo ad analizzare il sistema nello stato A sapendo che ciascuna porzione è riempita da $n = 1\,\text{mol}$ e si trova in equilibrio alla temperature T_0. La condizione di equilibrio ci permette di identificare le pressioni nelle due porzioni

$$p_2^{(A)} = \frac{mg}{S} + p_{\text{atm}} \ , \tag{16}$$

$$p_1^{(A)} = \frac{mg}{S} + p_2^{(A)} = \frac{2mg}{S} + p_{\text{atm}} \ . \tag{17}$$

A questo punto i volumi possono essere calcolati utilizzando l'equazione di stato

$$V_2^{(A)} = \frac{nRT_0}{p_2^{(A)}} = \frac{nRT_0}{\frac{mg}{S} + p_{\text{atm}}} \ , \tag{18}$$

$$V_1^{(A)} = \frac{nRT_0}{p_1^{(A)}} = \frac{nRT_0}{\frac{2mg}{S} + p_{\text{atm}}} \ . \tag{19}$$

Ora si ruota il sistema istantaneamente, e le variabili termodinamiche restano le stesse. Dopo di che si raggiunge un nuovo equilibrio e visto che le pareti e i setti sono impermeabili al calore il tutto avverrà in modo adiabatico. Le pressioni finali nello stato B sono identiche a quella atmosferica per ragioni di equilibrio

$$p_2^{(B)} = p_{\text{atm}} \ , \tag{20}$$

$$p_1^{(B)} = p_{\text{atm}} \ . \tag{21}$$

I volumi possono essere identificati tramite la legge di trasformazione dell'adiabatica

$$V_2^{(B)} = V_2^{(A)} \left(\frac{p_2^{(A)}}{p_2^{(B)}} \right)^{1/\gamma} , \tag{22}$$

$$V_1^{(B)} = V_1^{(A)} \left(\frac{p_1^{(A)}}{p_1^{(B)}} \right)^{1/\gamma} , \tag{23}$$

dove in questo caso abbiamo $\gamma = 5/3$ per un gas monoatomico.

Dato che l'entropia è una funzione di stato e i due stati A e B sono lungo una stessa adiabatica reversibile possiamo concludere che la variazione di entropia è nulla.

Ci resta da calcolare il lavoro. Utilizziamo il primo principio della termodinamica e teniamo in conto del fatto che non viene scambiato calore con l'esterno

$$L = \Delta Q - \Delta U = -\Delta U = -\left.\Delta U\right|_1 - \left.\Delta U\right|_2 . \tag{24}$$

Ci riduciamo quindi al calcolo della variazione dell'energia interna la quale è una funzione di stato e dipende solo dalla temperatura. Tenendo presente che il gas è monoatomico abbiamo

$$L = -\frac{3}{2} nR(T_1^{(B)} - T_0) - \frac{3}{2} nR(T_2^{(B)} - T_0) = \frac{3}{2} nRT_0 \left(2 - \frac{T_1^{(B)}}{T_0} - \frac{T_2^{(B)}}{T_0} \right) . \tag{25}$$

Il rapporto tra le temperature finali e iniziali del gas può essere calcolato tenendo presente che per una trasformazione adiabatica abbiamo $p^{(1-\gamma)/\gamma} T =$ costante. In conclusione

$$L = \frac{3}{2} nRT_0 \left[2 - \left(\frac{p_{\rm atm}}{\frac{mg}{S} + p_{\rm atm}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - \left(\frac{p_{\rm atm}}{\frac{2mg}{S} + p_{\rm atm}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] . \tag{26}$$

Soluzione Problema 4

Il primo minimo dell'inviluppo di diffrazione si trova dalla relazione note

$$\sin\theta_{\rm diff} = \frac{\lambda}{a} . \tag{27}$$

Quindi l'apertura dell'inviluppo di diffrazione sarà data dall'angolo $2\theta_{\rm diff}$.

Per quanto riguarda l'interferenza, le frange chiare sono identificate dalla relazione

$$\sin\theta_{\rm int} = i\,\frac{\lambda}{d} , \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{28}$$

Se facciamo il rapporto tra il seno dei due angoli troviamo

$$\frac{\sin\theta_{\rm int}}{\sin\theta_{\rm diff}} = i\frac{a}{d} = 0.24\, i . \tag{29}$$

La domanda può essere ricondotta al trovare i valori interi di i per cui il valore assoluto di tale rapporto resta inferiore a 1. Questo avviene per $|i| \leq 4$, e quindi per 9 valori interi di i. Concludiamo che la risposta al problema è che si osservano 9 frange chiare all'interno dell'inviluppo di diffrazione, e anche che il dato fornito sulla lunghezza d'onda non è necessario alla risoluzione del problema.

Soluzione Problema 5

Iniziamo dall'espressione della capacità del condensatore

$$C = \epsilon_0 \frac{L^2}{d} \ . \tag{30}$$

Quando l'interruttore si chiude il condensatore raggiunge una carica elettrica sulle due armature uguale e opposta, e in modulo uguale a

$$Q = CV = \epsilon_0 \frac{L^2}{d} V \ . \tag{31}$$

Il generatore pertanto compie un lavoro pari a

$$L_{\text{generatore}} = QV = \epsilon_0 \frac{L^2}{d} V^2 \ . \tag{32}$$

Parte di questo lavoro viene immagazzinato nel condensatore come energia potenziale e in particolare

$$U_{\text{condensatore}} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{L^2}{d} V^2 \ . \tag{33}$$

Per conservazione dell'energia, la quantità di energia dissipata nella resistenza durante il processo di carica risulta

$$E_{\text{dissipata}} = L_{\text{generatore}} - U_{\text{condensatore}} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{L^2}{d} V^2 \ . \tag{34}$$

La forza tra le armature si può calcolare come derivata dell'energia potenziale rispetto alla distanza tra le armature tenendo la differenza di potenziale costante

$$F_0 = - \left. \frac{\partial U_{\text{condensatore}}}{\partial d} \right|_{V=\text{cost}} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{L^2}{d^2} V^2 \ . \tag{35}$$

Se raddoppiamo la distanza tra le armature vale l'equazione di sopra e quindi la forza diventa un quarto della precedente.

Se invece scolleghiamo il condensatore allora esso diventa un sistema isolato e la carica sulle sue armature resta costante. L'espressione della forza è ora data da

$$F_{\text{isolato}} = - \left. \frac{\partial U_{\text{condensatore}}}{\partial d} \right|_{Q=\text{cost}} = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial (1/C)}{\partial d} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 L^2} \ . \tag{36}$$

In questa configurazione che abbiamo dopo aver scollegato il condensatore, la forza resta costante anche se variamo la distanza tra le armature.

Soluzione Problema 6

Nella ipotetica configurazione di equilibrio la sbarretta è in quiete e quindi non sono presente correnti indotte. L'unica corrente presente è quella dovuta al generatore che risulta

$$i_0 = \frac{\Delta V}{R} = 5\,\text{A} \ . \tag{37}$$

Sul filo agisce la forza di Lorentz che è diretta verso l'alto e di modulo pari a

$$F_{\text{Lorenz}} = Bi_0 l \ . \tag{38}$$

La condizione di equilibrio si ha quando la forza di Lorentz è uguale e opposta alla forza peso

$$mg = B_{\text{eq}} \frac{\Delta V}{R} l \qquad \Rightarrow \qquad B_{\text{eq}} = \frac{mgR}{\Delta V\, l} = 0.2\,\text{T} \ . \tag{39}$$

Nel caso generale la sbarretta sarà in modo e quindi sarà presente una forza elettromotrice indotta di cui dobbiamo tenere conto. Calcoliamo tale contributo dalla legge di Faraday. Introduciamo la variabile z che descrive l'altezza della sbarretta e introduciamo anche il verso antiorario di percorrenza della sbarretta. In questo modo il versore normale alla superficie è uscente dal foglio e il flusso del campo magnetico è positivo e risulta

$$\Phi_B = B\, ly \ . \tag{40}$$

La forza elettromotrice indotta risulta

$$V_{\text{indotta}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bl\frac{dy}{dt} \ . \tag{41}$$

Pertanto la corrente che fluisce nel circuito risulta data dall'espressione

$$i = \frac{\Delta V + V_{\text{indotta}}}{R} = \frac{\Delta V - Bl\frac{dy}{dt}}{R} \ . \tag{42}$$

L'equazione del moto ora può essere scritta nella forma seguente

$$m\frac{dy^2}{dt^2} = -mg + B\left(\frac{\Delta V - Bl\frac{dy}{dt}}{R}\right) l \ . \tag{43}$$

Possiamo riscriverla nella forma

$$\frac{dy^2}{dt^2} = -\frac{B^2 l^2}{mR}\frac{dy}{dt} - g + \frac{B\Delta V l}{mR} \ . \tag{44}$$

Vogliamo discutere la soluzione di questa equazione nel regime in cui la forza di gravità domina sulla forza di Lorentz. Abbiamo quindi un'equazione della forma

$$\frac{dy^2}{dt^2} = -\alpha\frac{dy}{dt} - \beta \ , \qquad \alpha = \frac{B^2 l^2}{mR} > 0 \ , \qquad \beta = g - \frac{B\Delta V l}{mR} > 0 \ . \tag{45}$$

La sbarretta parte da ferma e quindi la condizione iniziale di questo moto è

$$y(t=0) = h \ , \qquad \frac{dy}{dt}(t=0) = 0 \ . \tag{46}$$

Inizialmente la forza di gravità ha la meglio e il termine di attrito proporzionale alla velocità è nullo: la sbarretta inizia a cadere verso il basso. Appena la sbarretta inizia a cadere, la sua velocità non è più nulla ma diretta verso il basso quindi il termine di attrito è diretto verso l'alto e la caduta della sbarretta viene rallentata. Il moto è lo stesso di quello di un sasso che cade sotto l'effetto della forza di gravità e sottoposto all'attrito dell'aria. Assumendo che le guide verticali siano di lunghezza sufficiente, la sbarretta raggiungerà una velocità asintotica data dall'espressione

$$v_{\text{limite}} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{mgR}{B^2 l^2} - \frac{\Delta V}{Bl} \ . \tag{47}$$